

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

(DEUXIEME ANNEE)

PLAN

I : Systèmes d'équations linéaires

- 1) Définition
- 2) Structure des solutions de l'équation homogène
- 3) Cas des matrices diagonales ou triangulaires
- 4) Recherche d'une solution particulière

II : Equations différentielles du second ordre :

- 1) Equations linéaires à coefficients constants
- 2) Equations linéaires à coefficients non constants

Annexe I : Méthodes approchées de résolution

Annexe II : Le pendule de Foucault

Annexe III : Couplage mécanique

Annexe IV : Couplage électromagnétique

Annexe V : Déviation vers l'est/Particule dans un champ électromagnétique.

Annexe VI : Un exemple d'équation non linéaire

I : Systèmes d'équations linéaires

1- Définition

Soit X une fonction de classe C^1 d'un intervalle ouvert I dans \mathbb{K}^n (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). X est solution d'un système différentiel linéaire si, pour tout t élément de I , il existe une fonction A de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et une fonction B , de I dans \mathbb{K}^n , telles que :

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

A et B seront supposées continues. L'équation $X'(t) = A(t)X(t)$ s'appelle équation sans second membre (ou homogène).

EXEMPLE : x et y étant fonction de t ,

$$\begin{cases} x' = 2x + 3ty + e^t \\ y' = -4tx + y + \sin(t) \end{cases}$$

On a ici :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3t \\ -4t & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Un problème de Cauchy consiste à se donner un tel système différentiel linéaire, ainsi qu'une condition dite initiale de la forme $X(t_0) = X_0$, où t_0 est un réel donné élément de I , et X_0 un élément de \mathbb{K}^n . La question est alors de savoir s'il existe une solution à ce problème, et si cette solution est unique. Le théorème suivant, que nous admettrons, répond à la question :

THEOREME DE CAUCHY POUR LES EQUATIONS LINEAIRES :

Considérons le système différentiel linéaire $X' = A(t)X + B(t)$, où A est une fonction continue d'un intervalle I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et B une fonction continue de I dans \mathbb{K}^n . Etant donné (t_0, X_0) élément de $I \times \mathbb{K}^n$, il existe une solution unique X définie sur I telle que $X(t_0) = X_0$.

2- Structure des solutions de l'équation homogène

Rappelons que, dans le cas où $n = 1$, la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est somme d'une solution particulière et de l'équation générale de l'équation sans second membre. Il en est de même dans le cas général. En effet :

□ Si X_g est une solution quelconque de $X' = AX$ et X_p une solution donnée de $X' = AX + B$, alors $X_g + X_p$ vérifie :

$$(X_g + X_p)' = X_g' + X_p' = AX_g + AX_p + B = A(X_g + X_p) + B$$

donc $X_g + X_p$ est solution de $X' = AX + B$

□ Réciproquement, si X est solution de $X' = AX + B$, alors $X - X_p$ vérifie :

$$(X - X_p)' = X' - X_p' = AX + B - AX_p - B = A(X - X_p)$$

Donc $X - X_p$ est une des solutions X_g .

Intéressons-nous à l'équation sans second membre. Soit L l'ensemble des solutions X de l'équation $X' = A(t)X$, et soit t_0 un élément de I donné. L est stable par $+$ et \cdot , et est donc un espace vectoriel. Considérons l'application suivante :

$$L \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$X \rightarrow X(t_0)$$

Cette application est clairement linéaire. Par ailleurs, le théorème de Cauchy s'appliquant à l'équation $X' = A(t)X$, on en déduit que l'application précédente admet une réciproque, à savoir l'application qui, à chaque vecteur X_0 de E , associe la solution X élément de L telle que $X(t_0) = X_0$. L'application est donc un isomorphisme. Ceci a pour conséquence les points suivants :

□ Si $X(t_0) = 0$, alors $X = 0$. Autrement dit, si une solution s'annule en un point, elle est identiquement nulle.

□ En prenant la contraposée de l'implication précédente, une solution non identiquement nulle ne s'annule jamais.

□ E et L étant isomorphes ont même dimension. Si E est de dimension n , L aussi. Si X_1, \dots, X_n sont

des solutions linéairement indépendantes, toutes les solutions X sont de la forme $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$, et

dépendent de n paramètres arbitraires λ_i . Cependant, cela ne dit pas comment trouver X_1, \dots, X_n et sauf cas particulier (tel que $A(t)$ matrice constante), il n'y a pas de méthode générale.

EXEMPLE 1 :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + e^t y) \\ y' = \frac{1}{2}(e^{-t} x - y) \end{cases}$$

On vérifiera que $X_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ sont solutions. Elles sont indépendantes. Toutes les solutions sont donc de la forme $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, soit :

$$\begin{cases} x(t) = \lambda_1 e^t - \lambda_2 \\ y(t) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{-t} \end{cases}$$

EXEMPLE 2 :

$$\begin{cases} x' = \frac{tx + y}{1 + t^2} \\ y' = \frac{-x + ty}{1 + t^2} \end{cases}$$

On vérifiera que $X_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ sont solutions. Elles sont indépendantes. Toutes les solutions sont donc de la forme $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, soit :

$$\begin{cases} x(t) = \lambda_1 t - \lambda_2 \\ y(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t \end{cases}$$

Dans les deux cas, si on se fixe $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$, on obtient un système linéaire de deux équations dont les deux inconnues sont λ_1 et λ_2 . Le déterminant du système est non nul, comme on le vérifie facilement, donc λ_1 et λ_2 sont uniques. Si $x(t_0) = y(t_0) = 0$, alors x et y sont identiquement nulles.

3- Cas des matrices diagonales ou triangulaires

Deux cas sont faciles à résoudre :

a) A est diagonale ou diagonalisable dans une base indépendante de t :

Si A est diagonale, le système $X' = A(t)X$ se réduit à n équations scalaires de la forme :

$$x_i' = a_i(t)x_i$$

Si A est diagonalisable dans une base indépendante de t , notons P la matrice de passage (constante) à la nouvelle base, et D(t) la matrice diagonale. On a :

$$A = PDP^{-1}$$

$$\text{et } X' = A(t)X \Leftrightarrow X' = PD(t)P^{-1}X \\ \Leftrightarrow P^{-1}X' = D(t)P^{-1}X$$

Posons $Y = P^{-1}X$. On a alors :

$$Y' = D(t)Y \text{ qui se résout comme vu précédemment. Connaissant } Y, \text{ on en déduit } X = PY.$$

b) A est triangulaire ou trigonalisable dans une base indépendante de t :

Si A est triangulaire, on peut résoudre les systèmes en cascade. Il en est de même si A est trigonalisable dans une base indépendante de t , une fois effectué le changement de base.

Cela s'applique en particulier lorsque A est une matrice constante :

EXEMPLES :

$$\square \text{ Résoudre } \begin{cases} x' = 7x + 10y \\ y' = -3x - 4y \end{cases}$$

La matrice A vaut $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ de polynôme caractéristique $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ d'où $\lambda = 1$ ou 2 . Pour

$\lambda = 1$, un vecteur propre est donné par $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, alors que pour $\lambda = 2$, un vecteur propre est donné par $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On prend donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. On a $A = PDP^{-1}$.

On veut résoudre $X' = AX = PDP^{-1}X$ ou $Y' = P^{-1}X' = DP^{-1}X = DY$ d'où $Y = \begin{pmatrix} \lambda e^t \\ \mu e^{2t} \end{pmatrix}$ d'où $X = PY = \begin{pmatrix} 5\lambda e^t + 2\mu e^{2t} \\ -3\lambda e^t - \mu e^{2t} \end{pmatrix}$

□ Résoudre $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -4x - y \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$. $\lambda = 1$ est racine double. Un vecteur propre associé à $\lambda = 1$ est par exemple $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. A n'est pas diagonalisable. On peut chercher à la trigonaliser en cherchant e_2 tel que $A.e_2 = e_2 + e_1$, ce qui donne comme équation $2x + y = 1$, d'où par exemple $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$. Si on pose $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = Y = P^{-1}X$, on se ramène à $Y' = DY$ d'où le système plus simple :

$$\begin{cases} z_1' = z_1 + z_2 \\ z_2' = z_2 \end{cases}$$

d'où $z_2 = \lambda e^t$ et $z_1 = \mu e^t + \lambda t e^t$. D'où $x = \mu e^t + \lambda t e^t$ et $y = -2\mu e^t + \lambda(-2t+1)e^t$

□ Résoudre $\begin{cases} x' = -x + 8y - 2z \\ y' = x + 3y - z \\ z' = 3x - 6y + 2z \end{cases}$

Alors $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ de polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I) = -(\lambda-5)(\lambda-1)(\lambda+2)$. Un vecteur

propre associé à la valeur propre 1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, un vecteur associé à la valeur propre -2 est $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un

vecteur associé à la valeur propre 5 est $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Les solutions de

$Y' = DY$ sont $\begin{pmatrix} \lambda_1 e^t \\ \lambda_2 e^{-2t} \\ \lambda_3 e^{5t} \end{pmatrix}$. Donc $X = PY$ vaut $\begin{pmatrix} \lambda_1 e^t - 2\lambda_2 e^{-2t} - 3\lambda_3 e^{5t} \\ \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-2t} - 2\lambda_3 e^{5t} \\ 3\lambda_1 e^t + 3\lambda_2 e^{-2t} + \lambda_3 e^{5t} \end{pmatrix}$.

□ Résoudre $\begin{cases} x' = 19x + 11y - 45z \\ y' = 4x + 4y - 10z \\ z' = 8x + 5y - 19z \end{cases}$

La matrice A vaut $\begin{pmatrix} 19 & 11 & -45 \\ 4 & 4 & -10 \\ 8 & 5 & -19 \end{pmatrix}$. $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$. Pour $\lambda = 1$, un vecteur propre est

$e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ alors que pour $\lambda = 2$, un vecteur propre est $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut chercher e_2 tel que

$Ae_2 = e_2 + e_1$, par exemple $e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La résolution de $Y' = DY$

donne comme solution $\begin{pmatrix} \lambda_1 e^t + \lambda_2 t e^t \\ \lambda_2 e^t \\ \lambda_3 e^{2t} \end{pmatrix}$. D'où finalement :

$$\begin{cases} x = 5\lambda_1 e^t + 5\lambda_2 t e^t + 4\lambda_2 e^t + 2\lambda_3 e^{2t} \\ y = -2\lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{2t} \\ z = 2\lambda_1 e^t + 2\lambda_2 t e^t + \lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{2t} \end{cases}$$

Cela s'applique également dans certains cas où A est variable. Reprenons les exemples du II-2) :

EXEMPLE 2 :

$$\begin{cases} x' = \frac{tx + y}{1 + t^2} \\ y' = \frac{-x + ty}{1 + t^2} \end{cases}$$

La matrice A vaut $\begin{pmatrix} \frac{t}{1+t^2} & \frac{1}{1+t^2} \\ -\frac{1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$ vaut

$(\lambda - \frac{t}{1+t^2})^2 + \frac{1}{(1+t^2)^2}$. Les valeurs propres (complexes) sont $\lambda = \frac{t \pm i}{1+t^2}$. Pour $\lambda = \frac{t+i}{1+t^2}$, un vecteur

propre vérifie $y = ix$, soit par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. De même, la valeur propre $\lambda = \frac{t-i}{1+t^2}$ admet pour vecteur

propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \frac{t+i}{1+t^2} & 0 \\ 0 & \frac{t-i}{1+t^2} \end{pmatrix}$. Résolvons $Y' = DY$,

puis posons $X = PY$. La résolution de $Y' = DY$ avec $Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ conduit à l'équation $z_1' = \frac{t+i}{1+t^2} z_1$

(respectivement $z_2' = \frac{t-i}{1+t^2} z_2$) qu'on aurait pu obtenir directement à partir du système en posant

$z_1 = y + ix$, (respectivement $z_2 = y - ix$) et dont les solutions sont de la forme :

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda_1 \exp\left(\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + i \arctan t\right) \\ &= \lambda_1 \sqrt{1+t^2} (\cos(\arctan(t)) + i \sin(\arctan(t))) \\ &= \lambda_1 + \lambda_1 i t \end{aligned}$$

(respectivement $z_2 = \lambda_2 - \lambda_2 i t$). On en déduit que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + it(\lambda_1 - \lambda_2) \\ i(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_1 + \lambda_2)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + t\mu \\ \mu - \lambda t \end{pmatrix}$

combinaison de $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$.

EXEMPLE 3 :

$$\begin{cases} x' = t(4-3t)x + (2t^2-2t)y + 4t-3t^2 \\ y' = 6t(1-t)x + (4t^2-3t)y + 6t-6t^2 \end{cases}$$

A est la matrice $\begin{pmatrix} 4t-3t^2 & 2t^2-2t \\ 6t-6t^2 & 4t^2-3t \end{pmatrix}$ et B le vecteur $\begin{pmatrix} 4t-3t^2 \\ 6t-6t^2 \end{pmatrix}$. On a $X' = AX + B$, avec X de composante x et y . Le polynôme caractéristique de A vaut $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - t(t+1)\lambda + t^3$. Les

valeurs propres valent t et t^2 . Un vecteur propre associé à t vaut $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur propre associé à t^2 vaut $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On peut donc définir une matrice de passage P égale à $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Son inverse P^{-1} vaut $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice diagonale $D = P^{-1}AP$ vaut $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$. Posons $Y = P^{-1}X$. Y est solution du système différentiel :

$$Y' = DY + P^{-1}.B$$

soit :

$$\begin{cases} x' = tx + 2t \\ y' = t^2y - 3t^2 \end{cases}$$

où x et y désignent maintenant les composantes de Y . Ce système se résout sans difficulté. On trouve :

$$\begin{cases} x = a \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) - 2 \\ y = b \exp\left(\frac{t^3}{3}\right) + 3 \end{cases} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux constantes arbitraires.}$$

La solution en X vaut enfin PY , soit :

$$\begin{cases} x = b \exp\left(\frac{t^3}{3}\right) + 2a \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) - 1 \\ y = 2b \exp\left(\frac{t^3}{3}\right) + 3a \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{cases}$$

4- Recherche d'une solution particulière

Si l'on connaît n solutions indépendantes (X_1, \dots, X_n) de l'équation sans second membre, il est possible de trouver une solution particulière de l'équation générale $X' = A(t)X + B(t)$ sous la forme :

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \quad \text{avec les notations du paragraphe 2)}$$

mais où les λ_i ne sont plus des constantes, mais des fonctions de I dans \mathbf{R} . On a alors :

$$\begin{aligned} X' &= \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i' + \sum_{i=1}^n \lambda_i' X_i \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i A X_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i' X_i \\ &= A X + \sum_{i=1}^n \lambda_i' X_i \end{aligned}$$

Il suffit alors de résoudre $\sum_{i=1}^n \lambda_i' X_i = B$, où les inconnues sont les λ_i' . On a en effet un système de

Cramer pour tout t , car s'il existait un t_0 tel que $(X_1(t_0), \dots, X_n(t_0))$ était lié, il existerait $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ scalaires non tous nuls tels que :

$$\alpha_1 X_1(t_0) + \dots + \alpha_n X_n(t_0) = 0$$

Mais dans ce cas, la fonction $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ vérifierait $X' = AX$ et $X(t_0) = 0$, donc, d'après le théorème de Cauchy, X serait identiquement nulle, ce qui signifierait que les fonctions X_1, \dots, X_n sont liées.

Par conséquent, on peut résoudre le système $\sum_{i=1}^n \lambda_i' X_i = B$, trouver les solutions λ_i' , puis en les intégrant, trouver les λ_i .

EXEMPLE 1 :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + e^t y) + 1 \\ y' = \frac{1}{2}(e^{-t} x - y) + t \end{cases}$$

On a $X_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$. On cherche X sous la forme $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} \lambda_1' e^t - \lambda_2' = 1 \\ \lambda_1' + \lambda_2' e^{-t} = t \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \lambda_1' = \frac{e^{-t} + t}{2} \\ \lambda_2' = \frac{-1 + te^t}{2} \end{cases}$$

Une solution particulière est par exemple :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{t^2}{4} \\ \lambda_2 = -\frac{t}{2} + \frac{1}{2}(t-1)e^t \end{cases}$$

Donc finalement :

$$\begin{cases} x = \mu_1 e^t - \mu_2 - \frac{1}{2} + \frac{t^2 e^t}{4} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}(t-1)e^t \\ y = \mu_1 + \mu_2 e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{t^2}{4} - \frac{te^{-t}}{2} + \frac{1}{2}(t-1) \end{cases}$$

EXEMPLE 2 :

$$\begin{cases} x' = \frac{tx + y}{1 + t^2} + 1 + t^2 \\ y' = \frac{-x + ty}{1 + t^2} + 1 \end{cases}$$

On a $X_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$. On cherche X sous la forme $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} \lambda_1' t - \lambda_2' = 1 + t^2 \\ \lambda_1' + t\lambda_2' = 1 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \lambda_1' = t + \frac{1}{1+t^2} \\ \lambda_2' = -1 + \frac{t}{1+t^2} \end{cases}$$

Une solution particulière est par exemple :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{t^2}{2} + \arctan(t) \\ \lambda_2 = -t + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \end{cases}$$

Donc finalement :

$$\begin{cases} x = \mu_1 t - \mu_2 + \frac{t^3}{2} + t \arctan(t) + t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \\ y = \mu_1 + \mu_2 t - \frac{t^2}{2} + \arctan(t) + \frac{t}{2} \ln(1+t^2) \end{cases}$$

II : Equations différentielles linéaires du second ordre

1- Equations linéaires à coefficients constants

Rappel de 1ère année :

Ces équations sont de la forme $ax'' + bx' + cx = d(t)$. Les solutions sont de la forme $z + x_p$ où x_p est une solution particulière, et z la solution générale de l'équation sans second membre.

z se trouve de la façon suivante. On écrit l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$

- Si l'équation possède deux racines distinctes r et r' , z est combinaison linéaire des deux exponentielles e^{rt} et $e^{r't}$.
- Si l'équation possède une racine double r , z est combinaison linéaire de e^{rt} et te^{rt} .
- Si a, b, c sont réels et si l'équation possède deux racines complexes non réelles r et r' conjuguées, de la forme $\alpha + i\beta$, z est combinaison linéaire des parties réelles et imaginaires de l'exponentielle complexe e^{rt} , à savoir $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ et $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

On remarque que, dans tous les cas, l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est un espace vectoriel de dimension 2.

x_0 se trouve de la façon suivante :

- cas $ax'' + bx' + cx = P(t)e^{kt}$, où P est un polynôme, et k est éventuellement complexe. On cherche x_0 sous la forme $Q(t)e^{kt}$, avec Q polynôme de degré égal à $\deg(P)$ si k n'est pas racine de l'équation caractéristique, de degré égal à $\deg(P) + 1$, si k est racine simple de l'équation caractéristique, et de degré égal à $\deg(P) + 2$, si k est racine double de l'équation caractéristique.
- autres cas. Voir plus bas.

2- Equations linéaires à coefficients non constants

Ces équations sont de la forme $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$, où a, b, c et d sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes.

a) Structure des solutions :

Il est facile de vérifier que les solutions sont encore de la forme $z + x_p$ où x_p est une solution particulière, et z la solution générale de l'équation sans second membre. On résout ces équations sur des intervalles ouverts I où a ne s'annule pas. Quitte à diviser par a , on se ramène à une équation du type suivant, (en rebaptisant les coefficients) :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$$

En posant $y = x'$, on peut lui associer le système suivant :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = a(t)y + b(t)x + c(t) \end{cases}$$

ou encore

$$X' = A(t)X + B(t)$$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ et B le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$

Les résultats sur les systèmes différentiels du premier ordre s'applique donc ici et nous permettent d'affirmer que l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est un espace vectoriel de dimension 2, et que, (t_0, x_0, y_0) étant donnés, il existe une unique solution x vérifiant $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = y_0$ (théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires du second ordre).

b) Cas où l'on connaît l'une des solutions de l'équation sans second membre :

Si l'on connaît une solution particulière z de l'équation sans second membre, et qui ne s'annule pas sur l'intervalle d'étude, on peut chercher x sous la forme $x = uz$. On a en effet :

$$x = uz$$

$$x' = uz' + u'z$$

$$x'' = uz'' + 2u'z' + u''z$$

or $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ et $z'' = a(t)z' + b(t)z$

On obtient donc : $2u'z' + u''z = a(t)u'z + c(t)$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre en u' , et qu'on sait résoudre dans tous les cas.

En ce qui concerne l'équation sans second membre $x'' = a(t)x' + b(t)x$, la méthode conduit à l'équation $2u'z' + u''z = a(t)u'z$ qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre en u' sans second membre : les solutions d'une telle équation forment un espace vectoriel de dim 1. u' est donc le multiple d'une certaine fonction. Quant à u , on l'obtiendra en intégrant u' et en rajoutant une constante d'intégration arbitraire. On voit alors que u appartient à un espace vectoriel de dimension 2. On retrouve le fait que l'espace des solutions d'une équation linéaire du second ordre sans second membre est un plan.

c) Recherche d'une solution particulière :

Considérons deux solutions z_1 et z_2 linéairement indépendantes solutions de l'équation sans second membre $z'' = a(t)z' + b(t)z$. Le programme prévoit que la recherche de solutions particulières doit se faire avec indication d'une méthode. En voici par exemple une. Les solutions de l'équation sans second membre sont de la forme $x = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$ avec λ_1 et λ_2 scalaire. On pourra chercher une solution particulière de l'équation avec second membre en déterminant les fonctions λ_1 et λ_2 telles que :

$$\begin{cases} x = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \\ \lambda_1' z_1 + \lambda_2' z_2 = 0 \end{cases}$$

Le problème est évidemment de trouver d'abord z_1 et z_2 . On sait par exemple résoudre ce problème si les coefficients sont constants. Si l'on connaît une solution particulière z_1 , on peut appliquer le b) pour trouver z_2 .

Voici un dernier cas où il est facile de trouver un z particulier solution de l'équation homogène :

$$at^2x'' + btx' + cx = 0 \text{ (Equation d'Euler), } a, b \text{ et } c \text{ étant constants}$$

On peut chercher z sous la forme $z = t^r$, ce qui conduit à l'équation :

$$ar(r-1) + br + c = 0$$

permettant de déterminer r . On peut également effectuer le changement de variable $t = e^u$, qui conduit à une équation à coefficients constants.

On peut enfin essayer de chercher des solutions sous forme de séries entières.

EXEMPLES :

□ Résoudre $-t^2x'' + t(2+t)x' - (2+t)x = -2t^3(t+1)e^t$

On résout l'équation sans second membre :

$$-t^2x'' + t(2+t)x' - (2+t)x = 0$$

On résout pour $t \neq 0$. On constate que $z = t$ est solution évidente (?). Cherchons l'autre sous la forme $x = ut$. On a $x' = u't + u$ et $x'' = u''t + 2u'$ d'où :

$$-t^3u'' - 2t^2u' + t(2+t)(u't + u) - (2+t)ut = 0$$

$$\Leftrightarrow -t^3u'' + t^3u' = 0$$

$$\Leftrightarrow u'' = u'$$

$$\Leftrightarrow u' = \lambda e^t$$

$$\Leftrightarrow u = \lambda e^t + \mu$$

$$\text{d'où } x = \lambda t e^t + \mu t$$

Cherchons une solution particulière sous la forme :

$$\begin{cases} x = \lambda t e^t + \mu t \\ \lambda' t e^t + \mu' t = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$x' = \lambda(1+t)e^t + \mu \quad (\text{on voit l'intérêt de la deuxième équation pour simplifier } x')$$

$$x'' = \lambda'(1+t)e^t + \mu' + \lambda(2+t)e^t$$

On remplace dans l'équation, ce qui donne :

$$-\lambda t^2(1+t)e^t - t^2\mu' = -2t^3(t+1)e^t$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} \lambda' t e^t + \mu' t = 0 \\ \lambda'(t+1)e^t + \mu' = 2t(t+1)e^t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda' = 2(t+1) \\ \mu' = -2(t+1)e^t \end{cases}$$

Une solution est par exemple $\lambda = t^2 + 2t$ et $\mu = -2te^t$ d'où $x = t^3e^t$.

Annexe I : Méthodes approchées de résolution

La majorité des équations différentielles qui arrivent "naturellement" dans des problèmes concrets est rarement résoluble. Il existe cependant des procédés numériques approchés implantés dans de nombreux logiciels. Cette annexe a pour but de donner une idée des méthodes utilisées dans ces logiciels.

1- La méthode d'Euler

Soit l'équation $x' = f(t,x)$. On choisit un pas h . On cherche une solution approchée de l'équation, vérifiant $x(t_0) = x_0$. On approxime la solution exacte x par une fonction affine par morceaux sur les intervalles $[nh, (n+1)h]$, les valeurs de x en nh valant x_n , défini de la façon suivante. On pose, par récurrence :

$$\begin{cases} t_n = t_0 + nh \\ x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \end{cases}$$

Si f est C^1 , on peut montrer que la fonction approchée converge vers la solution exacte au sens suivant : soit $[0,t]$ un intervalle subdivisé en n intervalles de longueur égales $h = \frac{t}{n}$. Lorsque n tend

vers $+\infty$, $\text{Max}_{0 \leq p \leq n} |x_p - x(t_p)| = 0$. Nous nous contenterons de comparer x_n et $x(t)$.

Les exemples ci-dessous sont choisis très simples de façon à observer cette convergence. Dans la pratique, la méthode d'Euler et les autres méthodes sont utilisées pour des résolutions numériques approchées, lorsqu'on est incapable d'obtenir des solutions explicites de l'équation.

EXEMPLE 1 : $x' = x$

On prend $t_0 = 0$. La solution est évidemment $x = x_0 e^t$. La méthode d'Euler donne :

$$x_{n+1} = x_n + hx_n \Rightarrow x_n = x_0(1+h)^n$$

Si $nh = t$, quand n tend vers l'infini, on obtient à la limite :

$$x(t) = x_0 e^t \text{ qui est la solution exacte.}$$

EXEMPLE 2 : $x' = -tx$

La solution est donnée par $x = x_0 \exp(-\frac{t^2}{2})$. La méthode d'Euler conduit à considérer la suite

$x_{n+1} = x_n - nh^2 x_n = (1-nh^2)x_n$. Une programmation sur calculatrice conduit cependant à une limite tendant vers ∞ en changeant de signe lorsque n tend vers l'infini, h étant fixé, alors que la solution exacte tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. (Prendre par exemple $h = \frac{1}{9}$ et calculer 200 à 300

termes). Cela est dû aux approximations qui sont multipliées par n à chaque itération, de sorte que l'erreur commise est de l'ordre de $n!$. On conçoit donc les difficultés de prévision que l'on peut rencontrer lorsque l'équation différentielle n'est pas résoluble. Le même problème se rencontre pour les méthodes qui suivent.

2- La méthode du point milieu

Elle a pour but d'améliorer la méthode d'Euler, en remarquant qu'entre (t_n, x_n) et (t_{n+1}, x_{n+1}) , la dérivée x' est mieux approchée par la valeur de f au point milieu. Cela demande cependant d'estimer $\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$, estimation que l'on obtient à partir de la méthode d'Euler. On pose donc :

$$\begin{cases} t_{n+1/2} = t_n + \frac{h}{2} \\ x_{n+1/2} = x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n) \\ x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1/2}, x_{n+1/2}) \end{cases}$$

EXEMPLE : Avec l'exemple 1, on obtient :

$$t_{n+1/2} = nh + \frac{h}{2}$$

$$x_{n+1/2} = x_n \cdot \left(1 + \frac{h}{2}\right)$$

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) = x_0 \cdot \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^n$$

On obtient en développement limité de $\exp(h)$ avec un ordre de plus. L'approximation sera meilleure.

3- La méthode de Runge-Kutta

Cette méthode est une généralisation de la méthode précédente, où des premières estimations grossières permettent d'obtenir ensuite de meilleures approximations.

$$t_{n+1/2} = t_n + \frac{h}{2}$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$p_1 = f(t_n, x_n)$$

$$x_{n+1/2} = x_n + \frac{hp_1}{2} \quad \text{approximation par Euler}$$

$$p_2 = f(t_{n+1/2}, x_{n+1/2})$$

$$z_{n+1/2} = x_n + \frac{hp_2}{2} \quad \text{autre approximation du même point}$$

$$p_3 = f(t_{n+1/2}, z_{n+1/2})$$

$$z_{n+1} = x_n + hp_3 \quad \text{point milieu sur } z$$

$$p_4 = f(t_{n+1}, z_{n+1})$$

$$x_{n+1} = x_n + h \left(\frac{p_1}{6} + \frac{p_2}{3} + \frac{p_3}{3} + \frac{p_4}{6} \right) \quad \text{estimation obtenue en pondérant toutes les pentes rencontrées}$$

à l'aide des coefficients intervenant dans l'intégrale de Simpson.

EXEMPLE : avec l'exemple 1 :

$$t_{n+1/2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)h$$

$$t_{n+1} = (n+1)h$$

$$p_1 = x_n$$

$$p_2 = x_{n+1/2} = x_n \cdot \left(1 + \frac{h}{2}\right)$$

$$p_3 = z_{n+1/2} = x_n \cdot \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right)$$

$$p_4 = z_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right)$$

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right)$$

On remarque que l'on obtient le développement limité de $\exp(h)$ à l'ordre 4.

Annexe II : Le pendule de Foucault

L'expérience du pendule de Foucault, effectuée pour la première fois en 1851 au Panthéon, consiste à observer que le plan dans lequel se balance un pendule est affecté d'un mouvement de rotation. Le phénomène étant assez lent, on utilise un pendule de grande longueur afin que la vitesse du pendule et donc les atténuations dues au frottement de l'air, soient faibles.

En 2001, le pendule original était visible au Musée des Arts et Métiers, et une reconstitution de l'expérience initiale a également eu lieu au Panthéon.

L'explication du phénomène fait intervenir l'accélération de Coriolis dans un repère (O, i, j, k) lié à la Terre. O est le point d'attache du pendule, k indique la direction verticale (vers le haut), i l'est, j le nord. Les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} x'' = -2\omega \cos\theta z' + 2\omega \sin\theta y' + \lambda x & (1) \\ y'' = -2\omega \sin\theta x' + \lambda y & (2) \\ z'' = -g + 2\omega \cos\theta x' + \lambda z & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = l^2 & (4) \end{cases}$$

$\omega = \frac{2\pi}{24h}$ est la vitesse de rotation de la Terre. θ est la latitude du lieu. Les coefficients x', y', z'

proviennent de l'accélération de Coriolis $-2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{V}$ qui a pour composantes $-2 \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos\theta \\ \omega \sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Les

coefficients $\lambda x, \lambda y$ et λz représentent la tension du fil. l est la longueur du fil. A cause de la dernière équation, le système n'est pas linéaire. On supposera donc que les oscillations sont faibles, de façon à négliger les déplacements verticaux et à ne conserver que les termes du premier ordre. On posera alors :

$$(4) z = -l$$

$$(3) \lambda = -\frac{g}{l}$$

Le terme en x' dans l'expression de λ est également négligé car, dans (1) et (2), il fournirait des termes en xx' ou yx' qui seront du second ordre. D'où :

$$\begin{cases} x'' = 2\omega \sin\theta y' - \frac{g}{l}x & (1) \\ y'' = -2\omega \sin\theta x' - \frac{g}{l}y & (2) \end{cases}$$

On dispose alors de plusieurs méthodes de résolution :

METHODE 1 :

Le système est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\omega \sin\theta & -\frac{g}{l} & 0 \\ -2\omega \sin\theta & 0 & 0 & -\frac{g}{l} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

de la forme $\mathbf{V}' = \mathbf{A}\mathbf{V}$. Le déterminant de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ vaut :

$$\begin{aligned} \lambda^4 + (4\omega^2 \sin^2\theta + 2\frac{g}{l})\lambda^2 + \frac{g^2}{l^2} &= (\lambda^2 + \frac{g}{l})^2 + 4\omega^2 \sin^2\theta \lambda^2 \\ &= (\lambda^2 + 2i\omega \sin\theta \lambda + \frac{g}{l})(\lambda^2 - 2i\omega \sin\theta \lambda + \frac{g}{l}) \end{aligned}$$

dont les racines sont :

$$\lambda_0 = -i\omega \sin\theta + i\Omega$$

$$\lambda_1 = -i\omega \sin\theta - i\Omega$$

$$\lambda_2 = i\omega \sin\theta + i\Omega$$

$$\lambda_3 = i\omega \sin\theta - i\Omega$$

avec $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \omega^2 \sin^2\theta}$

On en déduit que x et y sont combinaisons linéaires des quatre exponentielles $\exp(\lambda_k t)$. Ecrivons donc

$$x(t) = a_0 \exp(\lambda_0 t) + a_1 \exp(\lambda_1 t) + a_2 \exp(\lambda_2 t) + a_3 \exp(\lambda_3 t)$$

Si l'on reporte cette expression dans l'équation (1), cela permet de trouver $y'(t)$, et donc $y(t)$ en intégrant. On trouve :

$$y(t) = -ia_0 \exp(\lambda_0 t) - ia_1 \exp(\lambda_1 t) + ia_2 \exp(\lambda_2 t) + ia_3 \exp(\lambda_3 t)$$

On peut vérifier que l'équation (2) est bien valide. On cherche alors les coefficients a_k de façon à ce que les conditions initiales soient vérifiées. Par exemple, pour :

$$x(0) = 0, x'(0) = V_0, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

on obtient :

$$a_0 = -a_1 = \frac{V_0}{2(\lambda_0 - \lambda_1)} = \frac{V_0}{4i\Omega} \quad a_2 = -a_3 = \frac{V_0}{2(\lambda_2 - \lambda_3)} = \frac{V_0}{4i\Omega}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } x(t) &= \frac{V_0}{2\Omega} \sin[(\Omega - \omega \sin \theta)t] + \frac{V_0}{2\Omega} \sin[(\Omega + \omega \sin \theta)t] \\ &= \frac{V_0}{\Omega} \sin(\Omega t) \cos(\omega \sin \theta t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } y(t) &= -\frac{V_0}{2\Omega} \cos[(\Omega - \omega \sin \theta)t] + \frac{V_0}{2\Omega} \cos[(\Omega + \omega \sin \theta)t] \\ &= -\frac{V_0}{\Omega} \sin(\Omega t) \sin(\omega \sin \theta t) \end{aligned}$$

METHODE 2 :

Reprenons le système.

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = 2\omega \sin \theta y' - \frac{g}{l} x \quad (1) \\ y'' = -2\omega \sin \theta x' - \frac{g}{l} y \quad (2) \end{array} \right.$$

Posons $Z = x + iy$. Le système est alors équivalent à l'équation unique :

$$Z'' + 2i\omega \sin \theta Z' + \frac{g}{l} Z = 0$$

Donc Z est combinaison linéaire à coefficients complexes des deux exponentielles $\exp[-i\omega \sin \theta \pm i\Omega]t = \exp(\lambda_0 t)$ ou $\exp(\lambda_1 t)$. Les conditions initiales donnent $Z(0) = 0$ et $Z'(0) = V_0$. Donc :

$$Z = \frac{V_0}{\lambda_0 - \lambda_1} [\exp(\lambda_0 t) - \exp(\lambda_1 t)] = \frac{V_0}{\Omega} \exp(-i\omega \sin \theta t) \sin(\Omega t)$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on trouve x et y .

$$x(t) = \frac{V_0}{\Omega} \sin(\Omega t) \cos(\omega \sin \theta t)$$

$$y(t) = -\frac{V_0}{\Omega} \sin(\Omega t) \sin(\omega \sin \theta t)$$

ce qui redonne les expressions précédentes.

Outre l'oscillation du pendule de pulsation Ω , il y a rotation du plan d'oscillation avec la pulsation $-\omega \sin \theta$, négative dans l'hémisphère Nord, (le plan tourne dans le sens des aiguilles d'une montre), positive dans l'hémisphère Sud (le plan tourne dans le sens trigonométrique), nulle à l'équateur (le plan ne tourne pas).

La période est $T = \frac{2\pi}{\omega |\sin\theta|} = \frac{24h}{|\sin\theta|}$, soit environ 31 h 48 mn à Paris.

AUTRES CONDITIONS INITIALES

Si on part des conditions initiales $x(0) = x_m$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, on trouvera :

$$Z = x_m [\cos(\Omega t) + i \frac{\omega \sin\theta}{\Omega} \sin(\Omega t)] \exp(-i\omega \sin\theta t)$$

Considérons un référentiel $(O, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{k})$ en rotation d'axe \mathbf{k} par rapport au référentiel $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, avec la pulsation $-\omega \sin\theta$, qui est la pulsation du plan d'oscillation vu précédemment. Dans le nouveau repère, l'affixe complexe ζ repérant le pendule vaut :

$$\begin{aligned} \zeta &= Z \exp(i\omega \sin\theta t) \\ &= x_m [\cos(\Omega t) + i \frac{\omega \sin\theta}{\Omega} \sin(\Omega t)] \end{aligned}$$

ζ ne reste pas dans le plan d'oscillation mais décrit une ellipse dont les demi-grands axes sont x_m et $x_m \frac{\omega \sin\theta}{\Omega}$. Dans le cas de la Terre, le petit axe est 10 000 à 100 000 fois plus petit que le grand, ce qui est imperceptible. Cette ellipse ne doit pas être confondue avec celle que l'on observe communément lorsque le pendule n'est pas rigoureusement lancé dans un plan. On observe alors une ellipse banale d'un système harmonique bidimensionnel.

Les solutions précédentes sont exactes, mais on se contente le plus souvent d'approximer Ω au premier ordre en ω par $\sqrt{\frac{g}{l}}$.

On affirme souvent que l'expérience de Foucault a enfin permis de prouver la rotation de la Terre. Cette affirmation, compréhensible par le grand public, ne nous paraît pas cependant refléter la réelle innovation de l'expérience de Foucault. En effet, on omet de dire qu'on s'intéresse à la rotation de la Terre **par rapport** à un référentiel galiléen. Or une excellente approximation de référentiel galiléen est donné par un référentiel géocentrique (ou mieux héliocentrique) dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines. Pour observer la rotation par rapport à un référentiel galiléen, il suffit donc de passer une ou deux heures le soir dehors et d'observer à l'oeil nu le mouvement des étoiles. Nul besoin d'expérience sophistiquée pour cela.

Ce qui fait l'originalité de l'expérience de Foucault, ce n'est pas le fait qu'il permet d'observer une rotation de la Terre par rapport à un référentiel galiléen, mais plutôt que cette observation peut se faire **dans un local fermé, sans aucune observation astronomique**. Il ramène donc à une échelle locale de quelques mètres un phénomène qui était jusque là à l'échelle de l'Univers.

Bien mieux, l'observation de la période de rotation du plan du pendule permet également, tout en restant dans une pièce fermée, de **pouvoir déterminer la latitude du lieu**, là aussi, sans aucune observation astronomique. Le sens de rotation du plan du pendule permet également de savoir si l'expérience se fait dans l'hémisphère Nord ou l'hémisphère Sud. C'est en cela que l'expérience du pendule de Foucault est remarquable.

Annexe III : Couplage mécanique

Considérons deux systèmes mécaniques oscillants. Le système i ($i = 1$ ou 2) dépend d'un paramètre x_i . x_i mesure par exemple l'écart entre la position du système et sa position à l'équilibre. Il est soumis à une force de rappel proportionnelle à x_i avec un coefficient k_i lui donnant une pulsation propre

$\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}$ où m_i est la masse du système i . En outre, les deux systèmes sont reliés entre eux, de sorte qu'il s'exerce sur le système i une force $K(x_{i+1} - x_i)$, avec $K \geq 0$. (les indices sont calculés modulo 2). On a alors :

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + K(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_2 + K(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Nous supposons K non nul, sinon la résolution est triviale. On se ramène à une équation différentielle matricielle du second ordre $X'' = AX$ en écrivant le système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1 + K}{m_1} & \frac{K}{m_1} \\ \frac{K}{m_2} & -\frac{k_2 + K}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A a pour forme $\begin{pmatrix} -\omega_1^2 - \Omega_1^2 & \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 & -\omega_2^2 - \Omega_2^2 \end{pmatrix}$ où $\Omega_i = \sqrt{\frac{K}{m_i}}$. Le polynôme caractéristique

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ de la matrice vaut :

$$\lambda^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2)\lambda + (\omega_1^2 + \Omega_1^2)(\omega_2^2 + \Omega_2^2) - \Omega_1^2\Omega_2^2$$

Le discriminant vaut $\Delta = (\omega_1^2 + \Omega_1^2 - \omega_2^2 - \Omega_2^2)^2 + 4\Omega_1^2\Omega_2^2$. Les deux racines du polynôme, étant de produit positif et de somme négative sont toutes deux négatives.

Ainsi $\lambda = \frac{-(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) \pm \sqrt{\Delta}}{2} < 0$. Notons λ_1 et λ_2 ces deux valeurs propres négatives.

Notons P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^2 à une base de vecteurs propres. Notons D la matrice diagonale correspondante. On a :

$$A = PDP^{-1}$$

donc le système différentiel $X'' = AX$ équivaut à $X'' = PDP^{-1}X$ ou $P^{-1}X'' = DP^{-1}X$. Si on pose $Y = P^{-1}X$, alors Y n'est autre que le vecteur des nouvelles composantes de X dans la nouvelle base de vecteurs propres. Y vérifie l'équation différentielle $Y'' = DY$, soit :

$$\begin{cases} y_1'' = \lambda_1 y_1 \\ y_2'' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

Les λ_i étant négatifs, les solutions y_i sont des combinaisons linéaires de $\exp(\pm i\Omega t)$, ou si l'on préfère de $\cos(\Omega t)$ et $\sin(\Omega t)$, avec $\Omega^2 = -\lambda_i$. Comme $X = PY$, x_1 et x_2 seront combinaisons linéaires de $\cos(\sqrt{-\lambda_1}t)$, $\sin(\sqrt{-\lambda_1}t)$, $\cos(\sqrt{-\lambda_2}t)$ et $\sin(\sqrt{-\lambda_2}t)$. Les deux pulsations possibles $\sqrt{-\lambda_1}$ ou $\sqrt{-\lambda_2}$, à savoir $\sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) + \sqrt{\Delta}}{2}}$ et $\sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) - \sqrt{\Delta}}{2}}$, sont appelées pulsations propres du système.

Comparons-les aux deux pulsations ω_1 et ω_2 . Supposons par exemple $\omega_1 \geq \omega_2$. Alors :

$$P(-\omega_1^2) = \Omega_1^2(-\omega_1^2 + \omega_2^2) \leq 0$$

$$P(-\omega_2^2) = \Omega_2^2(\omega_1^2 - \omega_2^2) \geq 0$$

Donc $-\omega_1^2$ est entre les racines, et $-\omega_2^2$ à l'extérieur des racines. Soit :

$$\lambda_1 = \frac{-(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) - \sqrt{\Delta}}{2} < -\omega_1^2 < \frac{-(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) + \sqrt{\Delta}}{2} = \lambda_2 < -\omega_2^2$$

ou encore :

$$-\lambda_1 = \frac{\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2 + \sqrt{\Delta}}{2} > \omega_1^2 > \frac{\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2 - \sqrt{\Delta}}{2} = -\lambda_2 > \omega_2^2$$

Ainsi :

$$\sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) + \sqrt{\Delta}}{2}} > \omega_1 > \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) - \sqrt{\Delta}}{2}} > \omega_2$$

L'une des pulsations propres du système est plus grande que les deux pulsations ω_1 et ω_2 , l'autre est comprise entre les deux.

Le fait de savoir qu'il n'y a comme solutions que des combinaisons d'exponentielles complexes justifie la méthode consistant à chercher directement les solutions du système sous la forme $x_1 = x_{10} \exp(i\Omega t)$ et $x_2 = x_{20} \exp(i\Omega t)$. Le fait d'écrire que le déterminant du système est nul (de façon qu'il y ait une solution non triviale) permet de retrouver les deux valeurs ci-dessus de Ω .

Des cas limites peuvent être considérés :

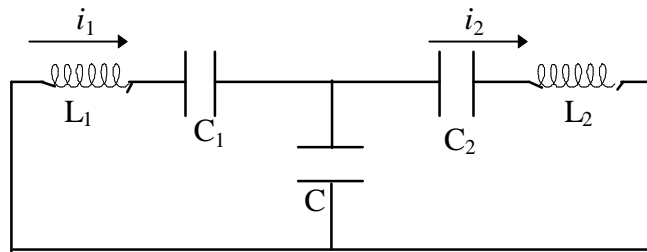
□ $K = 0$ (pas de couplage). Dans ce cas, $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, $\sqrt{\Delta} = \omega_1^2 - \omega_2^2$ et les pulsations propres du système sont simplement ω_1 et ω_2 , pulsations de chaque masse prise isolément (ce qui est normal, puisqu'il n'y a pas de couplage).

□ $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$. $\omega_1 = \omega_2 = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Les deux pulsations du système sont $\sqrt{\omega^2 + \sqrt{\Delta}}$ et ω . Cette situation est obtenue par exemple par deux pendules identiques reliés par un ressort. La pulsation ω est obtenue lorsque les deux pendules oscillent en phase et la pulsation $\sqrt{\omega^2 + \sqrt{\Delta}}$ lorsqu'ils sont en opposition de phase.

□ K tend vers $+\infty$. $\sqrt{\Delta}$ est équivalent à $\Omega_1^2 + \Omega_2^2$. La pulsation la plus forte est équivalente à $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$. On vérifiera que la plus faible tend vers $\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}}$. Cette dernière pulsation correspond à un système unique de masse $m_1 + m_2$ soumis à une force de rappel de coefficient $k_1 + k_2$. Cette situation est obtenue par exemple par deux pendules reliés par une barre rigide de masse négligeable.

EQUIVALENT ELECTRIQUE, COUPLAGE CAPACITIF :

Un système électrique conduisant aux mêmes équations est le suivant :



On pourra en effet vérifier que les équations sont :

$$\begin{cases} L_1 q_1'' = -\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2 - q_1}{C} \\ L_2 q_2'' = -\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_1 - q_2}{C} \end{cases}$$

avec $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$ et $i_2 = \frac{dq_2}{dt}$. Le système est équivalent au système mécanique

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + K(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_2 + K(x_1 - x_2) \end{cases}$$

à condition d'identifier :

$$\begin{array}{lll} q_1 & \text{à} & x_1 \\ q_2 & \text{à} & x_2 \\ L_1 & \text{à} & m_1 \\ L_2 & \text{à} & m_2 \\ k_1 & \text{à} & \frac{1}{C_1} \\ k_2 & \text{à} & \frac{1}{C_2} \\ K & \text{à} & \frac{1}{C} \end{array}$$

Les solutions sont évidemment identiques au cas mécanique, avec les cas limites suivants :

□ $C = \infty$ (pas de couplage). On remplace C par un court-circuit. Les pulsations propres du système sont simplement ω_1 et ω_2 , pulsations de chaque circuit indépendamment de l'autre.

□ $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = c$. $\omega_1 = \omega_2 = \omega = \sqrt{\frac{1}{Lc}}$. Les deux pulsations du système sont $\sqrt{\omega^2 + \sqrt{\Delta}}$ et ω . Cette situation est obtenue pour deux circuits identiques. La pulsation ω est obtenue lorsque les deux circuits oscillent en phase (avec la charge de C qui reste identiquement nulle) et la pulsation $\sqrt{\omega^2 + \sqrt{\Delta}}$ lorsqu'ils sont en opposition de phase.

□ $C = 0$ (on a coupé le circuit en C). La seule pulsation ayant un sens physique correspond à celle d'une circuit série d'inductance $L_1 + L_2$ et de capacité $\frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$.

Annexe IV : Couplage électromagnétique

Considérons deux circuits LC (sans résistance pour simplifier). Le circuit i ($i = 1$ ou 2) possède une inductance L_i et une capacité C_i . Si Q_i est la charge de la capacité (dont la dérivée par rapport au temps est l'intensité de courant parcourue par le circuit), et si chaque circuit était seul, on aurait :

$$L_i Q_i'' + \frac{Q_i}{C_i} = 0$$

$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}$ est la fréquence propre du circuit i . Le fait de mettre en présence les deux circuits fait que chacun d'eux crée un champ magnétique dont la variation crée une force électromotrice chez l'autre. Les deux circuits sont couplés par une inductance mutuelle M symétrique de sorte que les équations deviennent :

$$\begin{cases} L_1 Q_1'' + M Q_2'' + \frac{Q_1}{C_1} = 0 \\ L_2 Q_2'' + M Q_1'' + \frac{Q_2}{C_2} = 0 \end{cases}$$

On pose $k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2}$ dont des considérations énergétiques permettent de montrer qu'il est compris entre 0 (couplage nul, circuits infiniment éloignés l'un de l'autre) et 1 (couplage parfait, circuits confondus). k est le coefficient de couplage. On peut faire des combinaisons entre les lignes pour exprimer Q_1'' et Q_2'' en fonction de Q_1 et Q_2 , ce qui donne :

$$\begin{cases} Q_1'' = -\frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \frac{Q_1}{C_1} + \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \frac{Q_2}{C_2} = -\frac{1}{1-k^2} \omega_1^2 Q_1 + \frac{M/L_1}{1-k^2} \omega_2^2 Q_2 \\ Q_2'' = \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \frac{Q_1}{C_1} - \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \frac{Q_2}{C_2} = \frac{M/L_2}{1-k^2} \omega_1^2 Q_1 - \frac{1}{1-k^2} \omega_2^2 Q_2 + \end{cases}$$

On se ramène à une équation différentielle du deuxième ordre $X'' = AX$ en écrivant le système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} Q_1'' \\ Q_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1-k^2} \omega_1^2 & \frac{M/L_1}{1-k^2} \omega_2^2 \\ \frac{M/L_2}{1-k^2} \omega_1^2 & -\frac{1}{1-k^2} \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ vérifient l'équation :

$$P(\lambda) = (1-k^2)\lambda^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\lambda + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2(1-k^2) \geq 0$. Les deux racines λ_1 et λ_2 , étant de produit positif et de somme négative sont toutes deux négatives. Comme dans le cas du couplage mécanique, la diagonalisation de la matrice A nous ramène à un système de la forme :

$$\begin{cases} y_1'' = \lambda_1 y_1 \\ y_2'' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

Ainsi $\lambda = \frac{-(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{\Delta}}{2(1-k^2)} = -\Omega^2 < 0$ avec Ω pulsation propre du système, à savoir :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \sqrt{\Delta}}{2(1-k^2)}} \text{ et } \Omega_2 = \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \sqrt{\Delta}}{2(1-k^2)}}$$

Supposons par exemple $\omega_1 > \omega_2$. Alors :

$$P(-\omega_1^2) = -k^2 \omega_1^4 < 0$$

$$P(-\omega_2^2) = -k^2 \omega_2^4 < 0$$

Donc $-\omega_1^2$ et $-\omega_2^2$ sont entre les racines, et donc :

$$\Omega_1 \geq \omega_1 \geq \omega_2 \geq \Omega_2$$

Dans le cas de deux circuits identiques, les expressions précédentes se simplifient notablement :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad k = \frac{M}{L} \quad \Omega^2 = \frac{1}{(L \pm M)C}$$

Le fait de savoir qu'il n'y a comme solutions que des combinaisons d'exponentielles complexes permet également de chercher directement les solutions du système sous la forme $Q_1 = Q_{10} \exp(i\Omega t)$ et $Q_2 = Q_{20} \exp(i\Omega t)$. Le fait d'écrire que le déterminant du système est nul (de façon qu'il y ait une solution non triviale) permet de retrouver les valeurs ci-dessus de Ω .

Des cas limites peuvent être considérés :

□ $k = 0$ (pas de couplage). Dans ce cas, $\sqrt{\Delta} = \omega_1^2 - \omega_2^2$ et les pulsations propres du système sont simplement ω_1 et ω_2 , pulsations de chaque circuit pris isolément (ce qui est normal, puisqu'il n'y a pas de couplage).

□ k tend vers 1. L'équation en λ se réduit à $\lambda^2 = -\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ ce qui correspond à une pulsation

propre égale à $\frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$.

Annexe V : Déviation vers l'est/Particule dans un champ électromagnétique.

Soient \mathbf{C} et \mathbf{D} deux vecteurs de l'espace euclidien orienté de dimension 3. Dans cette annexe, on s'intéresse à l'équation différentielle $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{C} \wedge \mathbf{V} + \mathbf{D}$ où \mathbf{V} est une fonction dépendant du temps t .

Cette équation intervient en physique dans deux domaines totalement différents :

- Soit un corps pesant M dans un référentiel terrestre. On le lâche sans vitesse initiale d'un point O et on observe sa chute libre dans le champ de pesanteur \mathbf{g} . Du fait que le référentiel terrestre n'est pas galiléen, le corps est soumis à une force de Coriolis (les autres forces d'inertie sont contenues dans la définition de \mathbf{g}), et l'équation du mouvement est donnée par l'équation $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}$, où $\boldsymbol{\Omega}$ est le vecteur rotation de la Terre par rapport à un référentiel galiléen. L'équation est du type précédent, avec $\mathbf{C} = -2\boldsymbol{\Omega}$ et $\mathbf{D} = \mathbf{g}$. On observe une déviation vers l'est par rapport à une chute dans un référentiel galiléen.
- Soit une particule M de charge q de masse m dans un champ électrique uniforme \mathbf{E} et dans un champ magnétique uniforme \mathbf{B} . Cette particule est soumise à la force de Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}$. L'application du principe fondamental de la dynamique donne $m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}$, équation du type précédent avec $\mathbf{C} = -\frac{q}{m} \mathbf{B}$ et $\mathbf{D} = \frac{q}{m} \mathbf{E}$.

Résolution

Nous supposons que \mathbf{C} et \mathbf{D} sont linéairement indépendants. Sous cette hypothèse, $(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$ forme une base (non orthonormée de l'espace). Appelons (u, v, w) les composantes de \mathbf{V} dans cette base (le module C de \mathbf{C} est homogène à l'inverse d'un temps, D à une accélération, u à une longueur, v à un temps et w au carré d'un temps). On a alors, en utilisant une formule de double produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \wedge \mathbf{V} + \mathbf{D} &= \mathbf{C} \wedge (u\mathbf{C} + v\mathbf{D} + w\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) + \mathbf{D} \\ &= v\mathbf{C} \wedge \mathbf{D} + w\mathbf{C} \wedge (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) + \mathbf{D} \\ &= v\mathbf{C} \wedge \mathbf{D} + w(\langle \mathbf{C} | \mathbf{D} \rangle \mathbf{C} - C^2 \mathbf{D}) + \mathbf{D} \\ &= w\langle \mathbf{C} | \mathbf{D} \rangle \mathbf{C} + (1 - wC^2)\mathbf{D} + v\mathbf{C} \wedge \mathbf{D} \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = u'\mathbf{C} + v'\mathbf{D} + w'\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$$

d'où le système différentiel :

$$\begin{cases} u' = w\langle \mathbf{C} | \mathbf{D} \rangle \\ v' = 1 - wC^2 \\ w' = v \end{cases}$$

On a donc $v'' = -w'C^2 = -vC^2$. Les solutions de cette équation différentielle du second ordre sont :

$$v = \lambda \cos(Ct) + \mu \sin(Ct)$$

où λ et μ sont des constantes, homogènes à des temps. D'où :

$$w = \frac{1}{C^2} - \frac{v'}{C^2} = \frac{1}{C^2} + \lambda \frac{\sin(Ct)}{C} - \mu \frac{\cos(Ct)}{C}$$

Enfin :

$$u' = w\langle \mathbf{C} | \mathbf{D} \rangle = \left(\frac{1}{C^2} + \lambda \frac{\sin(Ct)}{C} - \mu \frac{\cos(Ct)}{C} \right) \langle \mathbf{C} | \mathbf{D} \rangle$$

donc $u = \left(\frac{t}{C^2} - \lambda \frac{\cos(Ct)}{C^2} - \mu \frac{\sin(Ct)}{C^2} + v \right) \langle \mathbf{C} | \mathbf{D} \rangle$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
V = & \left(\frac{t}{C^2} - \lambda \frac{\cos(Ct)}{C^2} - \mu \frac{\sin(Ct)}{C^2} + v \right) \langle C | D \rangle C \\
& + (\lambda \cos(Ct) + \mu \sin(Ct)) D \\
& + \left(\frac{1}{C^2} + \lambda \frac{\sin(Ct)}{C} - \mu \frac{\cos(Ct)}{C} \right) C \wedge D
\end{aligned}$$

Notons (u_0, v_0, w_0) les composantes de la vitesse V en $t = 0$ dans la base $(C, D, C \wedge D)$. On a :

$$u_0 = \left(-\frac{\lambda}{C^2} + v \right) \langle C | D \rangle$$

$$v_0 = \lambda$$

$$w_0 = \frac{1}{C^2} - \frac{\mu}{C}$$

donc $\lambda = v_0$

$$\mu = \frac{1}{C} - Cw_0$$

$$v = \frac{u_0}{\langle C | D \rangle} + \frac{v_0}{C^2}$$

donc :

$$\begin{aligned}
V = & \left(\frac{t}{C^2} - \frac{\sin(Ct)}{C^3} + v_0 \frac{1 - \cos(Ct)}{C^2} + w_0 \frac{\sin(Ct)}{C} \right) \langle C | D \rangle C + u_0 C \\
& + (v_0 \cos(Ct) + \left(\frac{1}{C} - Cw_0 \right) \sin(Ct)) D \\
& + \left(\frac{1 - \cos(Ct)}{C^2} + v_0 \frac{\sin(Ct)}{C} + w_0 \cos(Ct) \right) C \wedge D
\end{aligned}$$

V étant la vitesse du point M , il suffit de prendre une primitive pour obtenir la position de M (en supposant que O est choisi de façon que $M = O$ pour $t = 0$) :

$$\begin{aligned}
OM = & \left(\frac{t^2}{2C^2} - \frac{1 - \cos(Ct)}{C^4} + v_0 \left(\frac{t}{C^2} - \frac{\sin(Ct)}{C^3} \right) + w_0 \frac{1 - \cos(Ct)}{C^2} \right) \langle C | D \rangle C + u_0 t C \\
& + \left(v_0 \frac{\sin(Ct)}{C} + \left(\frac{1}{C} - Cw_0 \right) \frac{1 - \cos(Ct)}{C} \right) D \\
& + \left(\frac{t}{C^2} - \frac{\sin(Ct)}{C^3} + v_0 \frac{1 - \cos(Ct)}{C^2} + w_0 \frac{\sin(Ct)}{C} \right) C \wedge D
\end{aligned}$$

Déviation vers l'est

On suppose la chute pas trop longue de façon à pouvoir supposer g constant. On rappelle qu'on prend ici $C = -2\Omega$ et $D = g$. La vitesse initiale étant nulle, l'expression précédente se simplifie en :

$$\begin{aligned}
OM = & \left(\frac{t^2}{2\Omega^2} - \frac{1 - \cos(2\Omega t)}{4\Omega^4} \right) \langle \Omega | g \rangle \Omega \\
& + \frac{1 - \cos(2\Omega t)}{4\Omega^2} g \\
& + \left(\frac{\sin(2\Omega t)}{4\Omega^2} - \frac{t}{2\Omega^2} \right) \Omega \wedge g
\end{aligned}$$

t étant supposé petit, un équivalent du terme $\frac{1 - \cos(2\Omega t)}{4\Omega^2} \mathbf{g}$ est $\frac{t^2}{2} \mathbf{g}$. On reconnaît la chute libre usuelle.

Un équivalent de $(\frac{\sin(2\Omega t)}{4\Omega^2} - \frac{t}{2\Omega^2}) \Omega \wedge \mathbf{g}$ est $-\frac{t^3}{3} \Omega \wedge \mathbf{g}$. C'est la déviation vers l'est, négligeable devant le terme de la chute libre quand t tend vers 0.

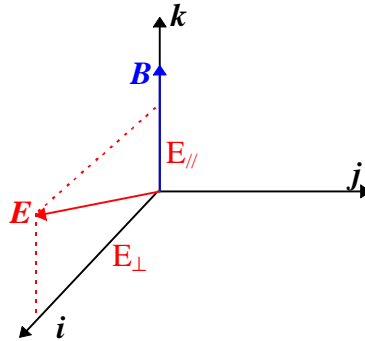
Un équivalent de $(\frac{t^2}{2\Omega^2} - \frac{1 - \cos(2\Omega t)}{4\Omega^4}) \langle \Omega | \mathbf{g} \rangle \Omega$ est $\frac{t^4}{6} \langle \Omega | \mathbf{g} \rangle \Omega$. Sa projection sur le méridien donne une déviation supplémentaire vers l'équateur, négligeable devant la déviation vers l'est.

Particule dans un champ électromagnétique uniforme et constant

On rappelle qu'on prend ici $\mathbf{C} = -\frac{q}{m} \mathbf{B}$ et $\mathbf{D} = \frac{q}{m} \mathbf{E}$, d'où, en posant $\Omega = \mathbf{C} = \frac{q\mathbf{B}}{m}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} = & \left(\frac{t^2}{2\Omega^2} - \frac{1 - \cos(\Omega t)}{\Omega^4} + v_0 \left(\frac{t}{\Omega^2} - \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega^3} \right) + w_0 \frac{1 - \cos(\Omega t)}{\Omega^2} \right) \frac{q^3}{m^3} \langle \mathbf{E} | \mathbf{B} \rangle \mathbf{B} - \frac{u_0 t q}{m} \mathbf{B} \\ & + \left(v_0 \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} + \left(\frac{1}{\Omega} - \Omega w_0 \right) \frac{1 - \cos(\Omega t)}{\Omega} \right) \frac{q}{m} \mathbf{E} \\ & + \left(\frac{t}{\Omega^2} - \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega^3} + v_0 \left(\frac{1 - \cos(\Omega t)}{\Omega^2} \right) + w_0 \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \right) \frac{q^2}{m^2} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \end{aligned}$$

Choisissons des axes de coordonnées de façon que $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ et que $\mathbf{E} = E_{\perp} \mathbf{i} + E_{\parallel} \mathbf{k}$ et exprimons la solution précédente dans cette base.



La vitesse initiale vaut :

$$\begin{aligned} u_0 \mathbf{C} + v_0 \mathbf{D} + w_0 \mathbf{C} \wedge \mathbf{D} &= -\frac{u_0 q}{m} \mathbf{B} + \frac{v_0 q}{m} \mathbf{E} + \frac{w_0 q}{m} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \\ &= -\frac{u_0 q B}{m} \mathbf{k} + \frac{v_0 q}{m} (E_{\perp} \mathbf{i} + E_{\parallel} \mathbf{k}) - \frac{w_0 q E_{\perp} B}{m} \mathbf{j} \\ &= \frac{v_0 q E_{\perp}}{m} \mathbf{i} - \frac{w_0 q E_{\perp} B}{m} \mathbf{j} + \left(\frac{v_0 q E_{\parallel}}{m} - \frac{u_0 q B}{m} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Notons ces composantes $V_{0x} \mathbf{i} + V_{0y} \mathbf{j} + V_{0z} \mathbf{k}$, et rappelons que $\frac{q\mathbf{B}}{m} = \Omega$. Le lecteur pourra alors vérifier que, après quelques simplifications, la solution trouvée précédemment s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{OM} &= \frac{t^2}{2} \frac{q\mathbf{E}_{//}}{m} \mathbf{k} \\
&+ \mathbf{V}_{0z}t \mathbf{k} + \sin(\Omega t) \left(\frac{\mathbf{V}_{0x}}{\Omega} \mathbf{i} + \frac{\mathbf{V}_{0y}}{\Omega} \mathbf{j} \right) + \cos(\Omega t) \left(-\frac{\mathbf{V}_{0y}}{\Omega} \mathbf{i} + \frac{\mathbf{V}_{0x}}{\Omega} \mathbf{j} \right) + \frac{\mathbf{V}_{0y}}{\Omega} \mathbf{i} - \frac{\mathbf{V}_{0x}}{\Omega} \mathbf{j} \\
&+ \frac{1 - \cos(\Omega t)}{\Omega^2} \frac{q\mathbf{E}_{\perp}}{m} \mathbf{i} + \frac{\sin(\Omega t) - \Omega t}{\Omega^2} \frac{q\mathbf{E}_{\perp}}{m} \mathbf{j}
\end{aligned}$$

Le mouvement général est la superposition de trois mouvements :

$\frac{t^2}{2} \frac{q\mathbf{E}_{//}}{m} \mathbf{k}$ est un mouvement uniformément accéléré dû à la composante du champ électrique parallèle au champ magnétique.

$\sin(\Omega t) \left(\frac{\mathbf{V}_{0x}}{\Omega} \mathbf{i} + \frac{\mathbf{V}_{0y}}{\Omega} \mathbf{j} \right) + \cos(\Omega t) \left(-\frac{\mathbf{V}_{0y}}{\Omega} \mathbf{i} + \frac{\mathbf{V}_{0x}}{\Omega} \mathbf{j} \right)$ est un mouvement de rotation uniforme dans le plan $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. En effet, les deux vecteurs $\frac{\mathbf{V}_{0x}}{\Omega} \mathbf{i} + \frac{\mathbf{V}_{0y}}{\Omega} \mathbf{j}$ et $-\frac{\mathbf{V}_{0y}}{\Omega} \mathbf{i} + \frac{\mathbf{V}_{0x}}{\Omega} \mathbf{j}$ sont orthogonaux et de même norme. Le rayon du cercle est la norme de ces deux vecteurs, à savoir le module de la composante de la vitesse dans le plan (\mathbf{i}, \mathbf{j}) divisée par Ω . Le terme supplémentaire $\frac{\mathbf{V}_{0y}}{\Omega} \mathbf{i} - \frac{\mathbf{V}_{0x}}{\Omega} \mathbf{j}$ donne le centre du cercle, et le terme $\mathbf{V}_{0z}t \mathbf{k}$ transforme le mouvement circulaire en mouvement hélicoïdal.

$\frac{1 - \cos(\Omega t)}{\Omega^2} \frac{q\mathbf{E}_{\perp}}{m} \mathbf{i} + \frac{\sin(\Omega t) - \Omega t}{\Omega^2} \frac{q\mathbf{E}_{\perp}}{m} \mathbf{j}$ est le plus curieux. Il décrit une trajectoire selon une cycloïde, avec un déplacement global dans la direction $-\mathbf{j}$, orthogonal au champ électrique et au champ magnétique.

Plusieurs cas particuliers sont intéressants, qu'on obtiendra par passage à la limite du cas général.

□ $\mathbf{E} = 0$. On obtient :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{V}_{0z}t \mathbf{k} + \sin(\Omega t) \left(\frac{\mathbf{V}_{0x}}{\Omega} \mathbf{i} + \frac{\mathbf{V}_{0y}}{\Omega} \mathbf{j} \right) + \cos(\Omega t) \left(-\frac{\mathbf{V}_{0y}}{\Omega} \mathbf{i} + \frac{\mathbf{V}_{0x}}{\Omega} \mathbf{j} \right) + \frac{\mathbf{V}_{0y}}{\Omega} \mathbf{i} - \frac{\mathbf{V}_{0x}}{\Omega} \mathbf{j}$$

qui est le seul mouvement hélicoïdal. Il correspond à la résolution de l'équation différentielle sans second membre.

□ $\mathbf{B} = 0$. Faisons tendre Ω (qui est proportionnel au module de \mathbf{B}) vers 0 en prenant des développements limités du sin et du cosinus. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{OM} &= \frac{t^2}{2} \frac{q\mathbf{E}_{//}}{m} \mathbf{k} \\
&+ \mathbf{V}_{0z}t \mathbf{k} + \mathbf{V}_{0x}t \mathbf{i} + \mathbf{V}_{0y}t \mathbf{j} \\
&+ \frac{t^2}{2} \frac{q\mathbf{E}_{\perp}}{m} \mathbf{i}
\end{aligned}$$

soit $\mathbf{OM} = t \mathbf{V}_0 + \frac{t^2}{2} \frac{q}{m} \mathbf{E}$. On retrouve le mouvement accéléré d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et constant.

□ Le fonctionnement d'un oscilloscope est modélisé par l'existence d'un champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ et d'un champ électrique $\mathbf{E} = E\mathbf{k}$. \mathbf{E}_{\perp} est donc nul. Une particule chargée pénètre dans le champ au point O avec une vitesse initiale $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0\mathbf{i}$.

$$OM = \frac{t^2}{2} \frac{qE}{m} \mathbf{k} + \sin(\Omega t) \frac{V_0}{\Omega} \mathbf{i} + \cos(\Omega t) \frac{V_0}{\Omega} \mathbf{j} - \frac{V_0}{\Omega} \mathbf{j}$$

On constate que la solution trouvée est la superposition des deux solutions obtenues en calculant séparément l'influence du champ magnétique et du champ électrique, à savoir :

une déviation verticale due au champ électrique : $z = \frac{qE}{2m} t^2$

une déviation horizontale due au champ magnétique. Soit $R = \frac{V_0}{\Omega}$. Si on se limite aux termes

en t^2 , cette déviation a pour composantes :
$$\begin{cases} x = R\Omega t = V_0 t \\ y = -\frac{1}{2} R\Omega^2 t^2 = -\frac{1}{2} V_0 \frac{Bq}{m} t^2 \end{cases}$$

□ Le mouvement cycloïdal est obtenu quand $E_{//} = 0$, et quand la particule est abandonnée sans vitesse initiale à l'origine.

$$OM = \frac{1 - \cos(\Omega t)}{\Omega^2} \frac{qE_{\perp}}{m} \mathbf{i} + \frac{\sin(\Omega t) - \Omega t}{\Omega^2} \frac{qE_{\perp}}{m} \mathbf{j}$$

□ Reprenons une fois encore le cas $E_{//} = 0$, mais cette fois avec une vitesse non nulle V_0 , perpendiculaire aux deux champs, donc de direction Oy et dont la composante V_0 selon \mathbf{j} est précisément égale à $-\frac{E}{B} = -\frac{qE}{m\Omega}$. On a :

$$\begin{aligned} OM &= \sin(\Omega t) \frac{V_0}{\Omega} \mathbf{j} - \cos(\Omega t) \frac{V_0}{\Omega} \mathbf{i} + \frac{V_0}{\Omega} \mathbf{i} \\ &+ \frac{1 - \cos(\Omega t)}{\Omega^2} \frac{qE}{m} \mathbf{i} + \frac{\sin(\Omega t) - \Omega t}{\Omega^2} \frac{qE}{m} \mathbf{j} \\ &= -t \frac{qE}{m\Omega} \mathbf{j} = t V_0 \end{aligned}$$

Le mouvement est rectiligne selon Oy. La force exercée par le champ électrique équilibre parfaitement la force exercée par le champ magnétique. Un filtre placé sur cet axe permettra donc de sélectionner les particules animées de la vitesse $-\frac{E}{B}$ selon l'axe Oy (filtre de Wien).

Annexe VI : Un exemple d'équation non linéaire

Ces équations sont en général non résolubles. Nous nous contenterons d'étudier le cas des équations du type $x'' = f(x)$, intervenant par exemple en mécanique lorsqu'une force dérive d'un potentiel. Si on multiplie les deux membres par x' , on obtient :

$$x'x'' = x'f(x)$$

équation qui s'intègre sous la forme suivante, en notant g une primitive de f :

$$\frac{1}{2} x'^2 = g(x) + C$$

C'est physiquement une variante du théorème de conservation de l'énergie mécanique, puisque, écrite sous la forme $\frac{1}{2} mx'^2 - mg = C$ ou encore $\frac{1}{2} mV^2 + E_p = C$, on obtient à gauche la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. L'équation obtenue s'appelle intégrale première. On peut ensuite écrire, sur des intervalle où x' ne s'annule pas, que :

$$\frac{dx}{dt} = x' = \sqrt{2g(x) + 2C} \text{ ou } x' = -\sqrt{2g(x) + 2C}$$

Dans le premier cas, on en déduit que $t = \int \frac{dx}{\sqrt{2g(x) + 2C}} = \Phi(x)$ d'où enfin $x = \Phi^{-1}(t)$. Les obstacles

de calcul proviennent du fait, qu'en général, on ne connaît pas de primitive de $\frac{1}{\sqrt{2g + 2C}}$ sous forme de fonction élémentaire, et que d'autre part, même si Φ est calculable, on ne sait pas toujours expliciter Φ^{-1} . Cependant, la démarche suivie permet souvent une étude qualitative du mouvement à défaut d'une expression explicite. En particulier, la représentation des courbes $\frac{1}{2}y^2 = g(x) + C$ peut être d'un précieux secours.

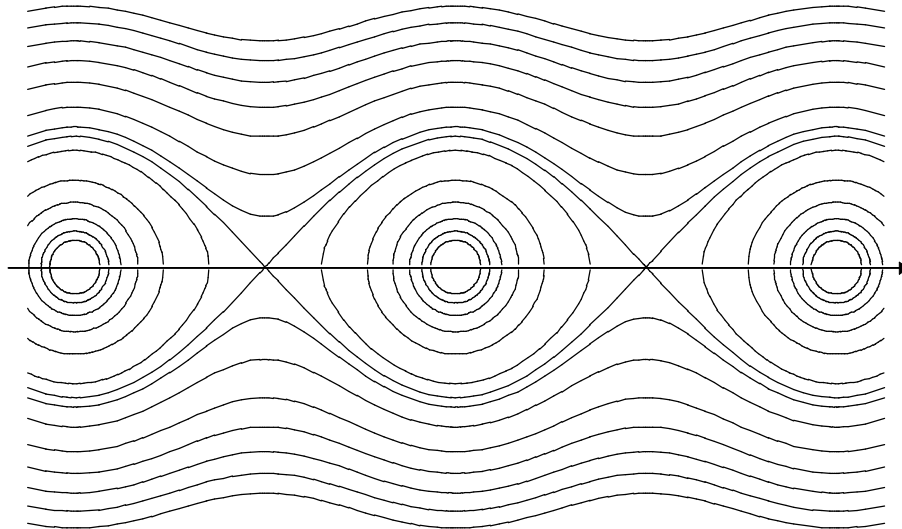
EXEMPLE :

L'équation du pendule simple est $x'' + \sin(x) = 0$

$$\Rightarrow x'x'' + x'\sin(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x'^2 - \cos(x) = C$$

On représente ci-dessous les courbes $\frac{1}{2}y^2 - \cos(x) = C$.



En abscisse se trouve la position angulaire x du pendule et en ordonnée sa vitesse angulaire $y = x'$. Les courbes fermées correspondent au pendule oscillant. Ces courbes sont limitées par une courbe limite, correspondant au pendule basculant de l'angle $-\pi$ à π (module 2π). Au-delà se trouvent les courbes décrivant le mouvement du pendule tournoyant.

