ESPACES PREHILBERTIENS

PLAN

I : Rappels de 1ère année

Les définitions et propriétés vues en première année sont rappelées sans démonstration. Quelques compléments sont effectués par moment.

1- Produit scalaire

Un produit scalaire est une une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, qui à un couple (x, y) de vecteurs de E associe un réel noté $<x, y>$, et telle que :

$\forall x \in E$, l'application $y \in E \to <x, y>$ est linéaire
$\forall y$, l'application $x \in E \to <x, y>$ est également linéaire.
$\forall x \in E, \forall y \in E, <x, y> = <y, x>$
$\forall x \in E, <x, x> \geq 0$
$\forall x, <x, x> = 0 \Rightarrow x = 0$

On pose $\| x \| = \sqrt{<x, x>}$, norme euclidienne de x associée au produit scalaire.

E, espace vectoriel muni d'un produit scalaire, est appelé espace préhilbertien. Si, de plus, il est de dimension finie, il est dit euclidien.

EXEMPLES :

❑ Si $E = \mathbb{R}^n$, on pose $<X,Y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$)

❑ Si E = $C^0([a,b])$, on pose $<f,g> = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$. On peut prendre la même définition pour les fonctions continues par morceaux, mais dans ce dernier cas, on peut avoir $<f, f> = 0$ sans que f ne soit nul : prendre par exemple $f = 0$ sur $[a, b[$ et $f(b) \neq 0$. Par contre si f est continue, on a bien $<f, f> = 0 \Rightarrow f = 0$ car $\int_a^b f^2(t)\,dt = 0$ est l'intégrale nulle d'une fonction continue positive ou nulle, donc cette fonction est nulle. Ainsi, on dispose d'un produit scalaire sur $C^0([a, b])$, mais pas sur l'espace des fonctions continues par morceaux.

La norme euclidienne vérifie les propriétés suivantes :

$\forall x \in E, \| x \| \geq 0$

$\forall x \in E, \| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$

$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$

$\forall (x, y) \in E^2, \| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2<x, y> + \| y \|^2$

$\forall (x, y) \in E^2, |<x,y>| \leq \| x \| \, \| y \|$ (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

$\forall (x, y) \in E^2, \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (*Inégalité triangulaire ou de Minkowski*)

On retrouve le produit scalaire à partir de la norme euclidienne au moyen des formules de polarisation :

$$<x, y> = \frac{\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2}{2} = \frac{\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2}{4}$$

On dispose :

❑ du théorème de Pythagore :

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \Leftrightarrow <x,y> = 0$$

En effet, $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2<x, y>$

Plus généralement, si les x_i sont deux à deux orthogonaux, on a :

$$\Big\| \sum_{i=1}^n x_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^n \| x_i \|^2$$

car $\Big\| \sum_{i=1}^n x_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^n \| x_i \|^2 + 2 \sum_{i<j} <x_i, x_j> = \sum_{i=1}^n \| x_i \|^2$ si tous les $<x_i, x_j>$ sont nuls pour $i \neq j$.

❑ de l'identité du parallélogramme :

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2$$

2- Orthogonalité

Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux si $<x, y> = 0$. x est dit unitaire si $\| x \| = 1$. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ (I fini ou non), est dite orthogonale si pour tout i différent de j, $<x_i, x_j> = 0$. Elle est dite orthonormale si, de plus, $\| x_i \| = 0$ pour tout i.

Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel euclidien sont dits orthogonaux si :

$$\forall x \in F, \forall y \in G, <x,y> = 0$$

Si on est en dimension finie, pour vérifier que deux sous-espaces F et G sont orthogonaux, il suffit de vérifier que les vecteurs d'une base de F sont orthogonaux aux vecteurs d'une base de G. Par ailleurs, deux sous-espaces vectoriels orthogonaux sont en somme directe.

Plus généralement, on a :
PROPOSITION
Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ *une famille de sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux. Alors ils sont en somme directe.*

Démonstration :
Si $x_1 + \ldots + x_p = 0$ avec $x_i \in F_i$, alors, en faisant le produit scalaire par x_i, on obtient $<x_i, x_i> = 0$ puisque tous les autres produits scalaires sont nuls. D'où $x_i = 0$, et ceci, quel que soit x_i.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E préhilbertion. On appelle orthogonal de F l'ensemble des vecteurs y de E tels que :

$$\forall x \in F, <x, y> = 0$$

On note cet ensemble F^o ou $F^\perp$.

$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, orthogonal à F. Si F est de dimension finie, pour appartenir à $F^\perp$, il suffit de vérifier l'orthogonalité avec une base de F.

Si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$.

3- Bases orthonormales
Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ d'un espace vectoriel de dimension finie est dite orthogonale si les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux.
Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ est dite orthonormale ou orthonormée si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont unitaires.

Un système de vecteurs non nuls constitué de vecteurs deux à deux orthogonaux forme un système est libre. Pour que ce soit une base, il suffit que le nombre de ces vecteurs soit égal à la dimension de l'espace.

Une base orthonormée vérifie :

$$<e_i, e_j> = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

δ_{ij} s'appelle symbole de Kronecker.

L'intérêt d'une base orthonormée est que le produit scalaire s'y exprime très simplement. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i$, alors $<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = {}^t XY$ et $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{{}^t XX}$

Dans une base quelconque, on a :

$$<x,y> = \sum_{i,j} x_i\, y_j <e_i,e_j>$$

ou encore, si l'on note M la matrice de terme général $<e_i,e_j>$:

$$<x,y> = {}^tXMY$$

où X et Y sont les vecteurs colonnes, composantes de x et y. $<e_i, e_j> = <e_j, e_i>$, M est symétrique.

Tout espace euclidien possède une base orthonormée. On en obtient une à partir d'une base quelconque en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Toute forme linéaire f dans un espace euclidien peut s'exprimer au moyen du produit scalaire. Soit en effet $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$, avec x_i élément de $\mathbb{R}$, alors :

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, f(e_i) = <a,x>$$

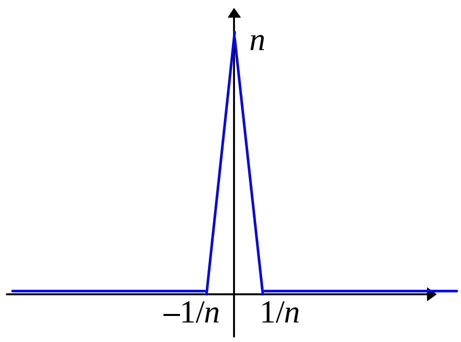
où $a = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i$. Si f est non nulle, a n'est autre que le vecteur normal à l'hyperplan Ker(f).

La propriété précédente n'existe pas en dimension infinie. Un contre-exemple est donné par l'impulsion de Dirac. Soit E l'espace $C^0([-1,1])$, muni du produit scalaire :

$$<f,g> = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt$$

L'application $\delta : E \to \mathbb{R}$, qui à f associe $f(0)$ ne peut être définie à partir d'un produit scalaire avec une certaine fonction g. En effet, si on prend f_n paire définie par $f_n(x) = 1 - nx$ sur $[0, \frac{1}{n}]$ et 0 sur $[\frac{1}{n}, 1]$, alors il faudrait que g soit telle que, pour tout n, $1 = \int_{-1/n}^{1/n} f_n(t)\, g(t)\, dt$. Or l'intégrale est majorée par $\frac{2}{n}$ Max $\{|g(t)|, t \in [0,1]\}$, quantité qui tend vers 0 quand n tend vers ∞ et ne peut donc rester égale à 1.

δ est une forme linéaire sur l'espace des fonctions continues, appelée distribution de Dirac (le mot distribution est utilisé de préférence à fonction car δ n'est pas une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Cette forme linéaire ne peut s'exprimer comme produit scalaire. Cependant, on n'en est pas loin, car elle peut s'exprimer comme limite de produits scalaires. Considérons en effet les fonctions g_n suivantes :



Alors $\delta(f) = f(0) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f(t)\, g_n(t)\, \mathrm{d}t$ pour toute fonction f continue. En fait, l'intégrale vaut $\int_{-1/n}^{1/n} f(t)\, g_n(t)\, \mathrm{d}t$. Intuitivement, on comprend pourquoi cette intégrale tend vers $f(0)$. Quand n tend vers l'infini, t étant compris entre $-\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$, $f(t)$ vaut à peu près $f(0)$. L'intégrale vaut environ :

$$\int_{-1/n}^{1/n} f(0)\, g_n(t)\, \mathrm{d}t = f(0) \int_{-1/n}^{1/n} g_n(t)\, \mathrm{d}t = f(0).$$

D'une manière plus rigoureuse, on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall\, t \in\,]-\alpha, \alpha[, \left|f(t) - f(0)\right| < \varepsilon \text{ (continuité de } f \text{ en 0)}$$

Mais par ailleurs, ε étant choisi :

$$\exists\, \mathrm{N}, \forall\, n \geq \mathrm{N}, [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \subset\,]-\alpha,\alpha[$$

Pour de tels n, on a, compte tenu du fait que $\int_{-1/n}^{1/n} f(0)\, g_n(t)\, \mathrm{d}t = f(0)$:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-1}^{1} f(t)\, g_n(t)\, \mathrm{d}t - f(0) \right| &= \left| \int_{-1/n}^{1/n} [f(t) - f(0)]\, g_n(t)\, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_{-1/n}^{1/n} \left|f(t) - f(0)\right| g_n(t)\, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_{-1/n}^{1/n} \varepsilon\ g_n(t)\, \mathrm{d}t = \varepsilon \int_{-1/n}^{1/n} g_n(t)\, \mathrm{d}t = \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{N}, \forall\, n \geq \mathrm{N}, \left| \int_{-1}^{1} f(t)\, g_n(t)\, \mathrm{d}t - f(0) \right| \leq \varepsilon$$

ce qu'on voulait montrer.

L'interprétation précédente fait que δ est souvent qualifiée d'impulsion, modélisée par une fonction de support infiniment bref et ayant une valeur infiniment grande.

4- Projecteurs orthogonaux et symétries orthogonales

PROPOSITION

Si F *est un sous-espace vectoriel de* **dimension finie** *d'un espace préhilbertien* E, *alors* F *et* $\mathrm{F}^\perp$ *sont supplémentaires*.

Démonstration :

E, lui, peut être de dimension infinie. Si $(e_1, .., e_m)$ est une base orthonormée de F, la décomposition d'un élément quelconque x de E en un élément de F et un élément de $\mathrm{F}^\perp$ s'obtient en écrivant :

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \langle e_i, x\rangle\, e_i}_{\in\ \mathrm{F}} + \underbrace{(x - \sum_{i=1}^{m} \langle e_i, x\rangle\, e_i)}_{\in\ \mathrm{F}^\perp}$$

L'application p définie par $p(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle e_i, x\rangle\, e_i$ est le projecteur orthogonal sur F. La quantité $\| x - p(x) \|$ s'appelle distance de x à F. Si on considère la quantité $\| x - z \|$ lorsque z décrit F, celle-ci atteint son minimum pour $z = p(x)$. On a également :

$$\| p(x) \| \leq \| x \|$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \langle e_i, x\rangle \right|^2 \leq \| x \|^2 \text{ (inégalité de Bessel).}$$

Si F est une droite D de vecteur directeur unitaire u, $F^{\perp}$ est alors un hyperplan H de vecteur normal u. La décomposition de x se réduit à :

$$x = \underbrace{\langle u, x\rangle\, u}_{\in \mathrm{D}} + \underbrace{(x - \langle u, x\rangle\, u)}_{\in \mathrm{H}}$$

le projeté orthogonal de x sur D est $p(x) = \langle u, x\rangle\, u$.
Le projeté orthogonal de x sur H est $x - \langle u, x\rangle\, u$.
On peut également définir :
Symétrie orthogonale par rapport à D :

$$s_D(x) = 2\langle u,x\rangle\, u - x = 2p(x) - x$$

Symétrie orthogonale par rapport à H :

$$s_H(x) = x - 2\langle u,x\rangle\, u = x - 2p(x) = -s_D(x)$$

Dans le cas de la dimension 2 ou 3, cela permet de traiter tout projecteur ou toute symétrie.

Si E est de dimension finie, on a :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^{\perp})$$
$$(F^{\perp})^{\perp} = F$$

En dimension infinie, on a seulement $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.

EXEMPLES :

❑ Soit E l'espace $l^2(\mathbb{R})$ des suites réelles $u = (u_n)$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{\,2}$ converge, muni du produit scalaire $\langle u,v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. Considérons F le sous-espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang. Cet espace est engendré par la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $e_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$, le 1 se trouvant au $n^{\text{ème}}$ rang. Soit u élément de $F^{\perp}$. Alors, pour tout n, $\langle e_n, u\rangle = 0$ donc $u_n = 0$. Donc $u = 0$. Donc $F^{\perp} = \{0\}$, et $F \oplus F^{\perp} = F \neq E$. $(F^{\perp})^{\perp} = E$ et $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$.

❑ Soit $E = C^0([0, 1])$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$. Considérons le sous-espace vectoriel F des fonctions f telles que $\int_0^{1/2} f(t)\, dt = 0$. F est le noyau de la forme linéaire φ :

$$\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,dt$$

Il s'agit donc d'un hyperplan. Montrons que $F^\perp = \{0\}$. Par l'absurde, supposons que $F^\perp \neq \{0\}$ et soit g un élément unitaire de $F^\perp$. g n'étant pas élément de F et F étant un hyperplan, la droite engendrée par F est supplémentaire de F : $E = F \oplus F^\perp$. Toute fonction f de E peut se décomposer sous la forme $f = h + \lambda g$, avec h élément de F et λ réel. On a donc $<f, g> = <h, g> + \lambda <g, g> = \lambda$, donc $h = f - <f, g>\, g$. Comme h appartient à F, on a $\varphi(h) = 0$, donc pour tout f de E $\varphi(f) = <f, g>\,\varphi(g)$. $\varphi(g) \neq 0$ sinon φ serait identiquement nulle sur E. Prenons en particulier les fonctions f_n définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ n(x - \frac{1}{2}) \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1 \text{ si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Comme $f_ng = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, f_ng appartient à F, donc $\varphi(f_ng) = 0$ donc $<f_ng, g>\,\varphi(g) = 0$ donc $<f_ng, g> = 0 = \int_{1/2}^{1} f_n(x)g(x)^2\,dx$. Quand on fait tendre n vers $+\infty$, $f_n(x)g(x)^2$ tend vers $g(x)^2$ pour tout x de $]\frac{1}{2}, 1]$ et le théorème de convergence dominée permet de conclure que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{1/2}^{1} f_n(x)g(x)^2\,dx = \int_{1/2}^{1} g(x)^2\,dx$$

Donc $g(x) = 0$ pour tout x de $[\frac{1}{2}, 1]$ et en particulier $g(\frac{1}{2}) = 0$. Reportons dans la relation $\varphi(f) = <f, g>\,\varphi(g)$. Pour tout f de E, on a :

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} f(x)g(x)\,\varphi(g)\,dx$$

donc $$\int_0^{1/2} f(x)\,(1 - g(x)\,\varphi(g))\,dx = 0$$

et en prenant $f(x) = 1 - g(x)\,\varphi(g)$, on obtient $\int_0^{1/2} (1 - g(x)\,\varphi(g))^2\,dx = 0$ donc $1 - g(x)\,\varphi(g) = 0$ pour tout x de $[0, \frac{1}{2}]$ et en particulier, $g(\frac{1}{2})\,\varphi(g) = 1$, ce qui est contradictoire avec $g(\frac{1}{2}) = 0$.

II : Endomorphisme dans les espaces euclidiens

On se place ici dans des espaces de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

1- Isométries vectorielles

On s'intéresse aux endomorphismes u qui préservent la norme, c'est–à–dire tels que :

$$\forall x \in E,\ \| u(x) \| = \| x \|$$

De tels endomorphismes sont qualifiés d'isométries vectorielles ou d'endomorphismes orthogonaux. Ils disposent des propriétés suivantes :

PROPOSITION :
Il y a équivalence entre :

i) $\forall x \in$ E, $\| u(x) \| = \| x \|$. *On dit que u conserve la norme.*
ii) $\forall x \in$ E, $\forall y \in$ E, $<u(x), u(y)> = <x, y>$. *On dit que u conserve le produit scalaire.*
iii) *u transforme une base orthonormée en une base orthonormée*

Démonstration :
ii) $\Rightarrow$ i) est trivial en prenant $x = y$
i) $\Rightarrow$ ii) en utilisant une formule de polarisation, par exemple $<x, y> = \dfrac{\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2}{4}$. Il en résulte que, si u conserve la norme, alors u conserve le produit scalaire :

$$<u(x), u(y)> = \frac{\| u(x)+u(y) \|^2 - \| u(x)-u(y) \|^2}{4}$$

$$= \frac{\| u(x+y) \|^2 - \| u(x-y) \|^2}{4} = \frac{\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2}{4} = <x, y>$$

ii) $\Rightarrow$ iii), car si (e_i) est une base orthonormée quelconque, alors, pour tout i, j :
$<e_i, e_j> = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker)
donc $<u(e_i), u(e_j)> = <e_i, e_j> = \delta_{ij}$ ce qui signifie que $(u(e_i))$ est orthonormée.
iii) $\Rightarrow$ i) : supposons qu'un opérateur u transforme une base orthonormée (e_i) en une base orthonormée (ε_i). Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :

$$\| u(x) \| = \| \sum_{i=1}^{n} x_i\, u(e_i) \| = \| \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \| x \|$$

La matrice de u dans une base orthonormée vérifie donc les propriétés suivantes : les vecteurs colonnes sont de norme 1, les colonnes sont deux à deux orthogonales. On notera que le sens "*une*" utilisée dans la propriété iii) peut se prendre aussi bien dans le sens "*une quelconque*" que dans le sens "*une particulière*". Le sens ii) $\Rightarrow$ iii) s'applique à une base quelconque orthonormée, mais il suffit que la propriété iii) soit vraie dans une base orthonormée particulière pour prouver i).

PROPRIETES :
i) *Une isométrie est bijective.*
ii) *L'ensemble des isométries est non vide, et est stable par composition et passage à l'inverse. Il s'appelle groupe orthogonal* O(E). *On rappelle qu'une isométrie s'appelle également endomorphisme orthogonal.*
iii) *Une isométrie admet pour déterminant* 1 *ou* –1.
iv) *L'ensemble des isométries de déterminant* 1 *est stable par composition et passage à l'inverse. Il s'appelle groupe spécial orthogonal* SO(E).
v) *Si* F *est un sous-espace vectoriel stable par une isométrie u, alors* $F^{\perp}$ *est aussi stable par u.*

Démonstration :
i) E étant de dimension finie, il suffit de montrer qu'un tel opérateur est injectif. Or :
$u(x) = 0 \Rightarrow \| u(x) \| = 0 \Rightarrow \| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$

ii) O(E) est non vide car il contient Id. Le i) montre en outre que O(E) est inclus dans GL(E). Montrons la stabilité pour les deux opérations indiquées.
Si u et v sont éléments de O(E), alors, pour tout x :

$\| u \circ v(x) \| = \| u(v(x)) \| = \| v(x) \|$ car u conserve la norme
$= \| x \|$ car v conserve la norme
donc $u \circ v$ conserve la norme.
Par ailleurs, $\| u^{-1}(x) \| = \| u(u^{-1}(x)) \|$ car u conserve la norme
$= \| x \|$
donc u^{-1} conserve la norme.

iii) Si (e_i) est une base orthonormée dans laquelle u possède une matrice M, alors on a, en notons X et Y les vecteurs composantes des vecteurs x et y :

$$<x, y> = {}^t\mathrm{X}\mathrm{Y}$$
$$<u(x), u(y)> = {}^t(\mathrm{MX})\mathrm{MY} = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{M}\mathrm{M}\mathrm{Y}$$

ainsi :

$$\forall\ \mathrm{X},\ \forall\ \mathrm{Y},\ {}^t\mathrm{X}\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{M}\mathrm{M}\mathrm{Y}$$

donc ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{Id}$
donc $\det({}^t\mathrm{MM}) = 1 = \det({}^t\mathrm{M})\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M})^2 = \det(u)^2$

iv) La stabilité indiquée résulte du fait que le $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$ et que $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$. Si u et v sont des éléments de O(E) de déterminant 1, il en est alors de même de $u \circ v$ et de u^{-1}. Les éléments de SO(E) sont appelées rotations ou isométries directes. Les autres isométries sont qualifiées d'indirectes.

v) Soit F stable par u. On a $u(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$, donc $\mathrm{F} = u^{-1}(u(\mathrm{F})) = u^{-1}(\mathrm{F})$. Ainsi F est aussi stable par u^{-1}. Montrons que $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u. Pour tout x de $\mathrm{F}^\perp$, on a :

$\forall\ y \in \mathrm{F}\ <u(x), y> = <u(x), u(u^{-1}(y))>$
$= <x, u^{-1}(y)>$ car u est une isométrie
$= 0$ car $x \in \mathrm{F}^\perp$ et $u^{-1}(y) \in \mathrm{F}$

donc $u(x) \in \mathrm{F}^\perp$.

Passons aux matrices.
PROPOSITION :
Il y a équivalence entre :
i) M *est la matrice d'une isométrie u dans une base orthonormée.*
ii) ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{I}_n$
iii) *Les colonnes de* M *forment une base orthonormée de* $\mathbb{R}^n$.
Une telle matrice s'appelle matrice orthogonale.

L'équivalence i) $\Rightarrow$ ii) a déja été rencontrée dans le iii) de la proposition précédente. L'équivalence avec le iii) actuel est la traduction matricielle du fait que u transforme une base orthonormée en ube base orthonormée.

Les propriétés de telles matrices sont analogues à celles des applications correspondantes, en particulier :

PROPRIETES :
i) *Une matrice orthogonale est inversible.*
ii) *L'ensemble des matrices orthogonales* $n \times n$ *est stable par produit et inverse. On l'appelle groupe orthogonal noté* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

iii) *Une matrice orthogonale admet pour déterminant* 1 *ou* –1.

iv) *L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant* 1 *est stable par produit et inverse. On l'appelle groupe spécial orthogonal noté* $SO_n(\mathbb{R})$.

EXEMPLE :
Les symétries orthogonales sont des isométries. Cela est évident en utilisant la définition : Soit s symétrie orthogonale par rapport à F. On a :

$$E = F \oplus F^\perp \to E$$
$$x = \ y + \ z \quad \to s(x) = y - z$$

et $\| x \|^2 = \| y \|^2 + \| z \|^2 = \| s(x) \|$

On peut également remarquer que, si (e_i) est une base orthonormée de E dont les p premiers vecteurs forment une base de F (et donc les $n - p$ restants une base de $F^\perp$), alors la matrice de la symétrie s est $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ qui est une matrice orthogonale puisque ses colonnes forment une base orthonormée. Son déterminant vaut $(-1)^{n-p}$ et donc s appartient à SO(E) si et seulement si $n - p$ est pair. Ainsi, certaines symétries peuvent également être classée parmi les rotations. C'est le cas en dimension 3 pour les symétries par rapport à une droite, qui peuvent être également considérées comme des demi–tours autour de cette droite.

Soit H un hyperplan et s_H la symétrie orthogonale par rapport à H. Alors s_H s'appelle une réflexion et son déterminant vaut –1.

2- Produit mixte, produit vectoriel

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et soient deux bases $(e_1, ..., e_n)$ et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. Soit P la matrice de passage de la première à la seconde. On dit que les deux bases orthonormées ont même orientation si $\det(P) > 0$. On choisit arbitrairement une base de E qu'on qualifie de directe. Toute base ayant même orientation que celle-ci sera également qualifiée de directe.

Soient $v_1, ..., v_n$ des vecteurs de E. Notons (V_e) (respectivement (V_ε)) la matrice élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la i-ème colonne est constituée des composantes des v_i dans la base e (respectivement dans la base ε). On a $(V_e) = P(V_\varepsilon)$ et :

$$\det_e(v_1, ..., v_n) = \det(V_e) = \det(PV_\varepsilon) = \det(P)\det(V_\varepsilon) = \det(P)\det_\varepsilon(v_1, ..., v_n)$$

Le déterminant de $(v_1, ..., v_n)$ dépend donc de la base choisie. Mais si les deux bases sont orthonormées et directes, alors P est une matrice orthogonale directe, donc $\det(P) = 1$, et donc :

$$\det_e(v_1, ..., v_n) = \det_\varepsilon(v_1, ..., v_n)$$

autrement dit, le déterminant des vecteurs $v_1, ..., v_n$ ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. Ce déterminant s'appelle alors produit mixte.

Intéressons-nous particulièrement au produit mixte en dimension 3. Soient trois vecteurs u, v, w d'un espace euclidien de dimension 3 et notons $[u, v, w]$ ce produit mixte, déterminant de (u, v, w) dans une base orthonormée directe quelconque. L'application $w \to [u, v, w]$ est une forme linéaire, donc s'obtient comme le produit scalaire de w par un certain vecteur, qui dépend de u et de v. On appelle produit vectoriel ce vecteur, noté $u \wedge v$. On a donc :

$$[u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle$$

Si on effectue le calcul à partir de composantes dans une base orthonormée directe, on a, en développant par rapport à la troisième colonne :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = (bc' - cb')\, a'' + (ca' - ac')\, b'' + (ab' - ba')\, c''$$

de sorte que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - a'b \end{pmatrix}$

Les propriétés du produit vectoriel sont les suivantes :

❑ ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$) *est lié si et seulement si* $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = 0$.
En effet, si ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$) est lié, alors pour tout $\boldsymbol{w}$, on a $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = 0$ donc $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est orthogonal à tout $\boldsymbol{w}$ donc est nul. Réciproquement, si le produit vectoriel est nul, alors pour tout $\boldsymbol{w}$, $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = 0$ donc ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$) est lié. Or si ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$) était libre, ils engendreraient un plan et, en prenant pour $\boldsymbol{w}$ un vecteur non nul orthogonal au plan, on aurait ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$) libre. On a donc une contradiction et par conséquent ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$) est lié.

❑ $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ *est orthogonal à* $\boldsymbol{u}$ *et à* $\boldsymbol{v}$.
Cela résulte du fait que $\langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}] = 0$ et de même pour $\boldsymbol{v}$.

❑ *Si* ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$) *est libre*, ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$) *forme une base directe*.
En effet, le déterminant de la matrice de passage d'une base orthonormée directe au système ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$) n'est autre que :

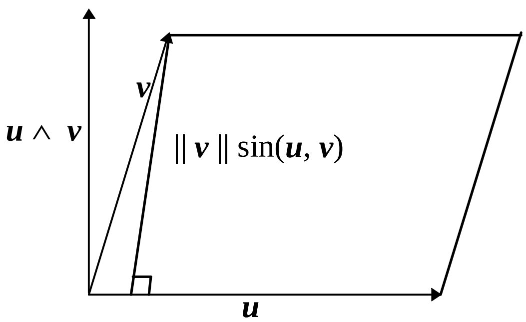
$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}] = \langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \rangle = \| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \|^2 > 0$$

❑ $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \|^2 + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 = \| \boldsymbol{u} \|^2 \, \| \boldsymbol{v} \|^2$
Vérification un peu fastidieuse mais sans difficulté que :

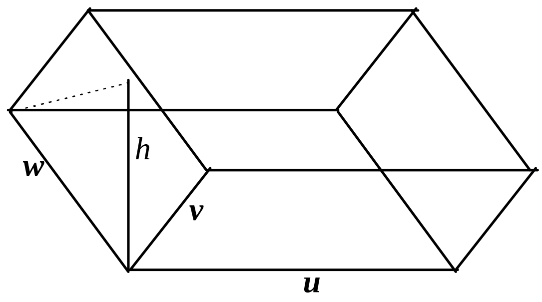
$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - a'b)^2 + (aa' + bb' + cc')^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)$$

❑ $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \| = \| \boldsymbol{u} \| \, \| \boldsymbol{v} \| \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
En effet $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \| \boldsymbol{u} \| \, \| \boldsymbol{v} \| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ et on remplace dans la relation précédente. En particulier, si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont orthogonaux, $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \| = \| \boldsymbol{u} \| \, \| \boldsymbol{v} \|$.

On en déduit que $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \|$ s'interprète comme l'aire dans l'espace du parallélogramme de côté $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.



La valeur absolue du produit mixte s'interprète comme le volume du parallélépipède construit sur $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$. En effet, la norme de $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est l'aire du parallélogramme servant de base, et le produit scalaire de ce vecteur par $\boldsymbol{w}$ permet de projeter $\boldsymbol{w}$ sur $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ et d'obtenir la hauteur h du parallélépipède.



❑ $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}$
Vérification sur les composantes ou bien en utilisant le caractère alterné du déterminant.

❑ $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ *est bilinéaire*
(c'est-à-dire linéaire par rapport à chacun des vecteurs). Cela se voit aussi soit sur les composantes, soit en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chacun de ses vecteurs.

❑ $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = -<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}> \boldsymbol{u} + <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}> \boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}> \boldsymbol{v} - <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> \boldsymbol{w}$
(*double produit vectoriel*)
Il suffit de choisir une base orthonormée directe, adaptée au problème. On choisit $\boldsymbol{I}$ unitaire tel que :

$$\boldsymbol{u} = \| \boldsymbol{u} \| \boldsymbol{I}$$

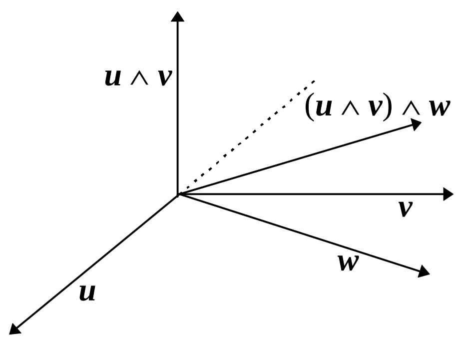
On choisit $\boldsymbol{J}$ tel que :

$$\boldsymbol{v} = \| \boldsymbol{v} \| (\cos(\theta)\, \boldsymbol{I} + \sin(\theta)\, \boldsymbol{J})$$

On pose alors $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{J}$. On a alors :

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \| \sin(\theta)\, \boldsymbol{K}$$

Pour $\boldsymbol{w}$ quelconque, il suffit alors de faire le calcul en utilisant l'expression des composantes du produit vectoriel. Un dessin, dans le cas particulier où les trois vecteurs sont coplanaires, permet de retrouver rapidement la formule :



Dans la figure précédente, $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w}$ appartient au plan $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, a une composante négative selon $\boldsymbol{u}$ et positive selon $\boldsymbol{v}$. Donc :

$$(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = -\,??\ \boldsymbol{u} + ???\ \boldsymbol{v}$$

?? et ??? ne sont autres que les produits scalaires des autres vecteurs, à savoir ?? = $<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>$ et ??? = $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}>$.

3- Isométries en dimension 2 ou 3

❑ En dimension 2, dans une base orthonormée, la matrice d'un opérateur orthogonal u est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$. La première colonne vérifiant $a^2 + b^2 = 1$, on peut trouver θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$. La deuxième colonne est orthogonale à la première, donc colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Etant unitaire, il n'y a que deux choix possibles : $\pm \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
Les matrices orthogonales sont donc de deux types :

$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ de déterminant 1. C'est la rotation R_θ d'angle θ.

$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ de déterminant –1. C'est la symétrie $S_{\theta/2}$ par rapport à la droite faisant un angle θ/2 avec le premier vecteur de base.

On vérifiera aisément que $R_\theta \circ R_\Phi = R_{\theta+\Phi}$.

❑ Soit u un endomorphisme orthogonal en dimension 3. Nous raisonnerons sur la dimension du sous-espace Inv(u) des vecteurs invariants par u :

- Si dim(Inv(u)) = 3, alors u = Id.

- Si dim(Inv(u)) = 2, alors u est la réflexion par rapport au plan Inv(u).

En effet, la droite orthogonale à Inv(u) est globalement invariante et son vecteur directeur, n'appartenant pas à Inv(u), est nécessairement transformé en son opposé par u.

- Si dim(Inv(u)) = 1, alors le sous-espace orthogonal à Inv(u) est un plan stable par u.

La restriction de u à ce plan est une isométrie de ce plan, n'admettant aucun vecteur invariant non nul. Il s'agit donc d'une rotation, dont l'axe est la droite Inv(u). La matrice de u dans une base orthonormée adaptée est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si a est un vecteur directeur unitaire de l'axe et si x est dans le plan orthogonal à Inv(u), alors $a \wedge x$ est lui aussi dans ce plan, est orthogonal à x, de même norme, et la base $(a, x, a \wedge x)$ est directe. L'image par u de x est alors :

$$u(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)\, a \wedge x$$

Si $\theta = \pi$, on parle de demi-tour ou de retournement. C'est aussi la symétrie orthogonale par rapport à l'axe du demi-tour.

Pour un vecteur x quelconque, la composante de x appartenant à l'axe (à savoir $\langle x, a\rangle a$) est invariante par u, alors que la composante de x appartenant au plan (à savoir $x - \langle x, a\rangle a$) est transformé selon la formule précédente. On a donc, dans le cas général :

$$\begin{aligned} u(x) &= \langle x, a\rangle a + \cos(\theta)(x - \langle x, a\rangle a) + \sin(\theta)\, a \wedge (x - \langle x, a\rangle a) \\ &= \cos(\theta)x + (1 - \cos(\theta))\langle x, a\rangle a + \sin(\theta)\, a \wedge x \end{aligned}$$

- Si dim(Inv(u)) = 0, remarquons d'abord que u + Id possède un noyau non nul.

En effet, le polynôme caractéristique de u det(XId – u) est de degré 3, donc admet au moins une racine réelle λ. Un élément v non nul du sous-espace propre $E_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id} - u)$ vérifier $u(v) = \lambda v$. Comme $\| u(x) \| = \| x \|$, on a nécessairement $\lambda = \pm 1$. Mais λ ne peut être égal à 1 puisqu'il n'y a pas de vecteur invariant non nul, donc $\lambda = -1$.

Soit H le plan orthogonal à v. $s_H \circ u$ laisse alors v invariant. Il s'agit donc d'une rotation autour de la droite engendrée par v puisque celle–ci est invariante. Il ne peut s'agir de l'identité car sinon, on aurait $u = s_H$ qui admet un plan invariant. Ainsi, u est la composée d'une rotation autour d'un axe et de la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à cet axe. La matrice de u dans une base orthonormée adaptée est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ce qui montre que la décomposition de u en une rotation et une réflexion associée est commutative.

Un cas particulier est $u = -\mathrm{Id}$. Ce type d'opérateur est parfois appelé antirotation.

dimension du sous-espace invariant	valeur du déterminant	nature de l'isométrie
3	1	Id
2	–1	réflexion s_H
1	1	rotation r (y compris les retournements s_D)
0	–1	antirotation $r \circ s_H$

Considérons une rotation en dimension 3 d'axe la droite engendrée par $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ étant une base du plan, de façon que $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ soit directe. $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ définit une orientation du plan. Cette orientation définit un angle de rotation θ. Si on avait pris comme vecteur directeur de la droite le vecteur $\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}$, alors une nouvelle base directe est $(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}')$, de sorte que l'orientation du plan est modifiée, ainsi que l'angle de la rotation, qui devient $-\theta$. Ainsi, le couple $(\boldsymbol{k}, \theta)$ est défini au signe près. Ce choix est arbitraire, on ne peut parler de l'angle de la rotation que si le plan ou l'axe orthogonal au plan a été orienté. Seul le cosinus de l'angle ne dépend pas de l'orientation.

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer l'angle et l'axe d'une rotation r. En voici deux :

❑ On détermine la droite invariante. On choisit un vecteur u orthogonal à cette droite. On calcule $\cos(\theta) = \dfrac{\langle r(u), u\rangle}{\| u \|^2}$. Si on choisit θ entre 0 et π, il suffit alors d'orienter l'axe au moyen du vecteur $u \wedge r(u)$.

❑ On détermine la droite invariante. Soit n un vecteur unitaire de cette droite. On choisit un vecteur u orthogonal à cette droite et unitaire. On calcule $v = n \wedge u$ de sorte que (u, v, n) forme une base orthonormée directe de l'espace. On calcule $r(u)$. On a alors $\cos(\theta) = \langle r(u), u\rangle$ et $\sin(\theta) = \langle r(u), v\rangle$.

EXEMPLE : Dans une base orthonormée directe, on donne la matrice d'une isométrie $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les vecteurs invariants forme une droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il s'agit donc d'une rotation. Soit a de composantes $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, orthogonal à l'axe de rotation. Son image vaut $r(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'angle entre les deux vecteurs vaut $\frac{2\pi}{3}$ (le cosinus vaut $-\frac{1}{2}$) en orientant l'axe dans le sens du vecteur $\boldsymbol{K}$ (1,1,1). Si l'on avait pris un $\boldsymbol{K}$ opposé, on aurait défini l'angle comme étant $-\frac{2\pi}{3}$.

On aurait également pu calculer $n = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\cos(\theta) = \langle r(u), u\rangle = -\frac{1}{2}$, $\sin(\theta) = \langle r(u), v\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4- Endomorphisme symétrique

Parmi les matrices, on distingue celles qui sont symétriques : ${}^t\mathrm{M} = \mathrm{M}$. Les endomorphismes associés dans une base orthonormée sont appelés endomorphismes symétriques.

PROPOSITION :
Soit u un endomorphisme de E. *Il y a équivalence entre* :

i) *La matrice de u dans une base orthonormée est symétrique.*

ii) $\forall x, \forall y, \langle u(x),y\rangle = \langle x,u(y)\rangle$

Démonstration :
i) $\Rightarrow$ ii). En effet, soit M la matrice de u, symétrique dans une base donnée. Alors, pour tout x de E de composantes X dans la dite base, et pour tout y de E de composantes Y, on a :

$$\langle u(x), y\rangle = {}^t(\mathrm{MX})\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{MY} = {}^t\mathrm{XMY} = {}^t\mathrm{X}(\mathrm{MY}) = \langle x, u(y)\rangle$$

ii) $\Rightarrow$ i). En effet, soit M la matrice de u dans une base orthonormée. Alors pour tout x de E de composantes X dans la dite base, et pour tout y de E de composantes Y :

$$\langle u(x),y\rangle = \langle x,u(y)\rangle \Rightarrow {}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{MY} = {}^t\mathrm{XMY}$$

Cette relation étant vraie pour tout Y, on a, pour tout X, ${}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{M} = {}^t\mathrm{XM}$ (ce sont les matrices de deux applications linéaires identiques de la variable Y), ou encore, en prenant la transposée $\mathrm{MX} = {}^t\mathrm{MX}$. Cette relation étant vraie pour tout X, on a $\mathrm{M} = {}^t\mathrm{M}$.

Dans la proposition énoncée, la formulation « *une base orthonormée* » du i) peut désigner aussi bien une base particulière qu'une base quelconque. En effet, l'implication i) $\Rightarrow$ ii) utilise l'existence de M symétrique dans une base particulière, la réciproque ii) $\Rightarrow$ i) montre la symétrie de M dans toute base orthonormée. Ainsi, si la matrice de M est symétrique dans une base orthonormée donnée, elle restera symétrique dans toute base orthonormée. D'ailleurs, cette dernière propriété peut se montrer indépendamment du ii). En effet, Si M est la matrice de u symétrique dans une base orthonormée, sa matrice dans une autre base orthonormée est $\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$, avec P matrice de passage d'une base orthonormée dans une autre. Autrement dit, P est une matrice orthogonale vérifiant donc $\mathrm{P}^{-1} = {}^t\mathrm{P}$. Donc $\mathrm{N} = {}^t\mathrm{PMP}$ et cette matrice est bien symétrique.

De même que les matrices symétriques constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les endomorphismes symétriques constituent un sous-espace vectoriel de L(E).

EXEMPLE :
❑ Projecteurs orthogonaux : p est un projecteur orthogonal si et seulement si $p^2 = p$ et p est symétrique.

La condition est nécessaire. Si p est un projecteur orthogonal, il existe une base orthonormée telle que la matrice de p soit M = $\begin{pmatrix} I_m & O_{m,n-m} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m,n-m} \end{pmatrix}$ où I_m est la matrice identité à m lignes et $O_{k,q}$ la matrice nulle à k lignes et q colonnes. On a alors clairement $M^2 = M$ et ${}^tM = M$.
Réciproquement, si $p^2 = p$ alors p est un projecteur (pas nécessairement orthogonal) sur Im(p) parallèlement à Ker(p). Il suffit de montrer que, si p est symétrique, on a Im(p) $\perp$ Ker(p). Soit $p(x)$ élément de Im(p) et y élément de Ker(p). On a alors :

$$<p(x),y> = <x,p(y)> = <x,O_E> = 0$$

❑ Symétries orthogonales : s est une symétrie orthogonale si et seulement si s^2 = Id et s est symétrique.
La condition est nécessaire. Si s est une symétrie orthogonale, il existe une base orthonormée telle que la matrice de s soit M = $\begin{pmatrix} I_m & O_{m,n-m} \\ O_{n-m,m} & -I_{n-m} \end{pmatrix}$ où I_m est la matrice identité à m lignes et $O_{k,p}$ la matrice nulle à k lignes et p colonnes. On a alors clairement $M^2 = I_n$ et ${}^tM = M$.
Réciproquement, si $s^2 = s$ alors s est une symétrie (pas nécessairement orthogonale) par rapport à Ker(s – Id) parallèlement à Ker(s + Id). Il suffit de montrer que, si s est symétrique, on a Ker(s – Id) $\perp$ Ker(s + Id). Soit x élément de Ker(s – Id) et y élément de Ker(s + Id). On a alors :

$$<s(x),y> = <x,s(y)>$$
$$\Rightarrow \quad <x,y> = -<x,y>$$
$$\Rightarrow \quad <x,y> = 0$$

❑ Signalons également qu'on peut de même définir la notion d'endomorphisme antisymétrique, à savoir :

$$\forall x, \forall y, <u(x),y> = -<x,u(y)>$$

Dans une base orthonormée, un tel endomorphisme possèdera une matrice antisymétrique. En dimension 3, une telle matrice est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ et on vérifiera que l'image de x par cet endomorphisme est le produit vectoriel de $\Omega = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ par x. Ainsi, $u(x) = \Omega \wedge x$. La relation d'antisymétrie s'exprime alors en dimension 3 sous la forme :

$$\forall x, \forall y, <\Omega \wedge x,y> = -<x,\Omega \wedge y>$$

et on reconnaît le caractère alterné du produit mixte (déterminant des trois vecteurs dans une base orthonormée directe) :

$$\det(\Omega, x, y) = -\det(x, \Omega, y)$$

PROPOSITION :
Si u est symétrique et F un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Démonstration :
Soit x appartenant à $F^\perp$. Alors pour tout y de F :

$$<u(x), y> = <x, u(y)>$$
$$= 0 \qquad \text{car } x \in F^\perp \text{ et } u(y) \in F$$

donc $u(x)$ appartient à $F^\perp$

5- Réduction des endomorphismes symétriques

Les endomorphismes symétriques jouissent de la propriété suivante :

PROPOSITION

Soit u symétrique. Il existe une base orthonormée de vecteurs propres

Variante :

Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée.

Toute matrice symétrique réelle M est de la forme $P^{-1}DP = {}^tPDP$, où D est diagonale et P orthogonale.

<u>Démonstration</u> :

Soit M la matrice de u dans une base orthonormée. Soit n la dimension de E :

❑ M possède n valeurs propres réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité).

<u>Démonstration 1</u> :

On se place dans $\mathbb{C}^n$. Soit λ une valeur propre complexe de M, de vecteur propre X élément de $\mathbb{C}^n$, de composantes x_i. On a :

$$MX = \lambda X$$

$\Rightarrow \quad {}^t\overline{X}\, MX = \lambda\, {}^t\overline{X}X$ en multipliant à gauche par ${}^t\overline{X}$

On prend la transposée de cette égalité, et son conjugué :

$\Rightarrow \quad {}^t\overline{X}\, {}^t\overline{M}\, X = \overline{\lambda}\, {}^t\overline{X}X$

Or M est à coefficients réels et symétrique donc ${}^t\overline{M} = M$

$\Rightarrow \quad {}^t\overline{X}\, MX = \overline{\lambda}\, {}^t\overline{X}X$

donc $\quad \lambda\, {}^t\overline{X}X = \overline{\lambda}\, {}^t\overline{X}X$

$\Rightarrow \quad \lambda = \overline{\lambda}$ puisque ${}^t\overline{X}X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$

<u>Démonstration 2</u> :

On se place dans $\mathbb{C}^n$. Soit $\lambda = a + ib$ une valeur propre complexe de M, de vecteur propre $X = U + iV$, avec a et b réels et U et V éléments de $\mathbb{R}^n$ non tous deux nuls. On a :

$$MX = \lambda X$$

$\Rightarrow \quad MU + iMV = aU - bV + i(bU + aV)$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} MU = aU - bV \\ MV = bU + aV \end{cases}$

Considérons ${}^tUMV = b\,{}^tUU + a\,{}^tUV$. Utilisant le fait que M est symétrique, cette quantité réelle est égale à ${}^tVMU = a\,{}^tVU - b\,{}^tVV$, avec ${}^tVU = {}^tUV$ (quantité réelle égale à <U,V>). Il en résulte que $b({}^tUU + {}^tVV) = 0$ donc $b = 0$ puisque ${}^tUU + {}^tVV = \| U \|^2 + \| V \|^2$ est non nul. λ est donc réelle.

❑ Soit $F = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda$, somme des sous-espaces propres de u. Il s'agit de montrer que F = E. Si ce n'est pas le cas, $E = F \oplus F^\perp$ avec $F^\perp$ non réduit à {0} et stable par u car l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme symétrique est lui-même stable par cet endomorphisme. Mais $u|_{F^\perp}$ est lui-même symétrique :

$$\forall x \in F^\perp, \forall y \in F^\perp, \langle u|_{F^\perp}(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \langle x, u|_{F^\perp}(y)\rangle$$

donc admet des vecteurs propres réels, qui sont aussi des valeurs propres de u. Donc F contient des valeurs propres de u. Ceci est absurde puisque toutes les vecteurs propres de u sont éléments de F.

❑ En outre, les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.
Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes et si x et y sont respectivement deux vecteurs propres, on a :

$$<u(x), y> = \lambda<x, y> = <x, u(y)> = \mu<x, y>$$

$$\Rightarrow \quad <x, y> = 0 \text{ puisque } \lambda \neq \mu.$$

En choisissant dans chaque sous-espace propre une base orthonormée, on obtient une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.

Annexe I : Isométries laissant invariant le tétraèdre régulier

Une isométrie laissant invariant le tétraèdre régulier permute les quatre sommets. Inversement, soit une permutation des quatre sommets, trouver une isométrie f correspondant à cette permutation.

On dénombre 24 isométries, dont 12 directes.

❑ Si les quatre sommets sont invariants, f = Id.

❑ Si un seul sommet est invariant, les trois autres sont permutés. Il s'agit d'une rotation dont l'axe passe par la hauteur contenant le sommet invariant et d'angle $\pm \frac{\pi}{3}$. Il existe 8 telles permutations.

Notons r_A la rotation laissant A invariant, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

❑ Si deux sommets A et B sont invariants, les deux autres C et D étant permutés, f est la symétrie orthogonale par rapport au plan passant par A et B et le milieu de [C,D]. Il y a 6 telles permutations. Notons s_{AB} cette reflexion.

❑ Si A et B sont permutés entre eux, de même que C et D, il s'agit du demi–tour d'axe la droite passant par le milieu de [A,B] et de [C,D]. Il y a 3 telles permutations. Notons $d_{AB,CD}$ ce demi–tour.

❑ Il reste 6 permutations circulaires, par exemple A $\to$ B $\to$ C $\to$ D $\to$ A. On peut les considérer comme la composée d'une rotation par rapport à la hauteur passant par A, qui permute B $\to$ C $\to$ D $\to$ B, et de la réflexion par rapport au plan passant par C, D et le milieu de [A,B]. Il s'agit donc d'une anti-déplacement, réflexion ou antirotation. Il ne peut s'agir d'une réflexion car $f \circ f \neq$ Id. Il s'agit donc d'une antirotation. Puisque $f \circ f \circ f \circ f$ = Id, l'angle de l'antirotation est $\frac{\pi}{4}$. On remarque que l'isométrie permute circulairement les milieux de [A,B], [B,C], [C,D], et [D,A]. Mais ces quatre points sont coplanaires et le plan les contenant est globalement invariant. Il s'agit donc du plan de l'antirotation. Notons a_{ABCD} cet antirotation.

Ayant trouvé 24 isométries, cela prouve que le chaque isométrie du tétraèdre correspond bien à une permutation des quatre sommets {A,B,C,D}.

Annexe II : Isométries laissant invariant le cube

Il existe 48 isométries. En effet, si l'on se donne un sommet A et trois vecteurs ***i***, ***j*** et ***k*** portés par les côtés du carré, il y a huit images possibles pour A, 3 pour ***i***, 2 pour ***j***. Le cube image peut alors être reconstitué de manière unique. Parmi ces isométries, 24 sont directes et 24 sont indirectes. En effet, si s_O est la symétrie par rapport au centre du cube, l'application $f \rightarrow s_O \circ f$ réalise une bijection entre les isométries directes et les isométries indirectes.

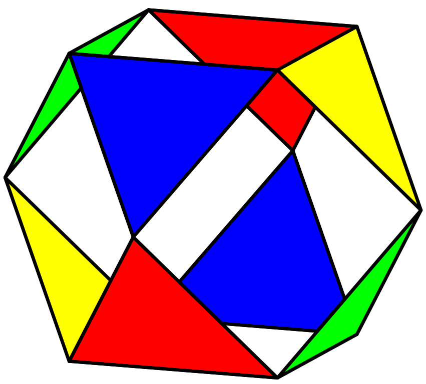
Il suffit donc de trouver les 24 rotations. On a :

- ❑ l'identité
- ❑ 6 rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$, d'axe passant par les centres de deux faces opposées.
- ❑ 3 demi-tours d'axe passant par les centres de deux faces opposées.
- ❑ 6 demi-tours d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées.
- ❑ 8 rotation d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$ d'axe les diagonales du cube.

Les antidéplacements sont :

- ❑ la symétrie s_0 par rapport au centre O du cube.
- ❑ 6 antirotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ par rapport au plan médiateur de quatre côtés parallèles du cube.
- ❑ 3 réflexions par rapport au plan médiateur de quatre côtés parallèles du cube.
- ❑ 6 réflexions par rapport au plan contenant deux côtés opposés.
- ❑ 8 antirotations d'angle $\frac{\pi}{3}$, d'axe les diagonales, par rapport au plan orthogonal à la diagonale, passant par O. Ce plan coupe les côtés du cube selon un hexagone.

A noter qu'on peut associer au 24 rotations l'ensemble des 24 permutations de quatre objets. En effet, appliquer une rotation sur le cube est équivalent à permuter les quatre diagonales. On le verra mieux en coupant les huit sommets du cube de façon à obtenir un cuboctaèdre. Nous représentons ci-dessous un tel cuboctaèdre en enlevant également les faces carrées qui restent de façon à voir ce qui se passe de l'autre côté.



Colorions les triangles opposés de la même couleur, ce qui donne quatre paires de quatre couleurs. Il devient alors facile à voir que :

- les demi-tours d'axes passant par deux sommets opposés du cuboctaèdre permutent deux couleurs
- les tiers-de-tours d'axes passant par les centres de deux triangles opposés permutent trois couleurs
- les rotations d'axes passant par les centres des carrés (absents) du cuboctaèdre permutent quatre couleurs, soit circulairement pour les quart de tours, soit deux à deux pour les demi-tours.

Annexe III : utilisation d'opérateurs symétriques ou antisymétriques en physique ou en SI

1- Opérateur d'inertie

Soit M un point de masse m se déplaçant à la vitesse $\boldsymbol{V}$ par rapport à un référentiel et O un point de ce référentiel. On appelle moment cinétique de M par rapport à O le vecteur :

$$\boldsymbol{L}(\mathrm{O}) = \boldsymbol{OM} \wedge m\boldsymbol{V}$$

L'intérêt du moment cinétique tient dans le fait que, lorsque O est fixe dans le référentiel considéré, sa dérivée par rapport au temps, appelée moment dynamique de M par rapport à O, est égal aux moments des forces appliquées en M par rapport à O (y compris les forces d'inertie si le référentiel n'est pas galiléen).

Supposons que M effectue un mouvement de rotation autour d'un axe passant par O. La vitesse $\boldsymbol{V}$ est alors de la forme $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM}$, où $\boldsymbol{\Omega}$ est un vecteur appelé vecteur instantané de rotation. L'axe $(\mathrm{O},\boldsymbol{\Omega})$ est l'axe de rotation. On a alors :

$$\boldsymbol{L}(\mathrm{O}) = m\, \boldsymbol{OM} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM})$$

On introduit alors un opérateur, appelé opérateur d'inertie, qui, à tout vecteur $\boldsymbol{u}$, associe le vecteur $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) = m\, \boldsymbol{OM} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OM}) = m\, \mathrm{OM}^2\boldsymbol{u} - m <\boldsymbol{u},\boldsymbol{OM}>\, \boldsymbol{OM} = m\, (\boldsymbol{OM} \wedge \boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{OM}$, de sorte que $\boldsymbol{L}(\mathrm{O}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Omega})$.

En ce qui concerne un solide, on opère de même en sommant au moyen d'une intégrale triple sur tous les points du solide. L'opérateur d'inertie prend alors la forme :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) &= \iiint_S \boldsymbol{OM} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OM})\, \mathrm{d}m \\ &= \iiint_S \mathrm{OM}^2\boldsymbol{u} - <\boldsymbol{u},\boldsymbol{OM}>\, \boldsymbol{OM}\, \mathrm{d}m\end{aligned}$$

$\boldsymbol{J}$ est clairement linéaire et est un opérateur symétrique. En effet :

$$<\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}> = \iiint_S \mathrm{OM}^2<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> - <\boldsymbol{u},\boldsymbol{OM}><\boldsymbol{v},\boldsymbol{OM}>\, \mathrm{d}m$$

qui est symétrique par rapport à $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, donc égal à $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{J}(\boldsymbol{v})>$. Cet opérateur est donc représenté par une matrice 3×3 symétrique dans une base orthonormée. La matrice de $\boldsymbol{J}$ s'écrit donc $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & -\mathrm{F} & -\mathrm{E} \\ -\mathrm{F} & \mathrm{B} & -\mathrm{D} \\ -\mathrm{E} & -\mathrm{D} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$

avec :

$\mathrm{A} = <\boldsymbol{J}(\boldsymbol{i}),\boldsymbol{i}> = \iiint_S \mathrm{OM}^2 - (\boldsymbol{i}.\boldsymbol{OM})^2\, \mathrm{d}m = \iiint_S (y^2+z^2)\, \mathrm{d}m$, moment d'inertie par rapport à l'axe $(\mathrm{O},\boldsymbol{i})$

$B = \iiint_S (x^2+z^2)\, dm$, moment d'inertie par rapport à l'axe $(O,\boldsymbol{j})$

$C = \iiint_S (x^2+y^2)\, dm$, moment d'inertie par rapport à l'axe $(O,\boldsymbol{k})$

$D = -<\boldsymbol{J}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{j}> = \iiint_S yz\, dm$, quantité appelée produit d'inertie.

$E = \iiint_S xz\, dm$

$F = \iiint_S xy\, dm$

Etant symétrique, elle est diagonalisable dans un repère orthonormé, dont les axes sont appelés axes principaux d'inertie.

En général, bien que $\boldsymbol{L}(O)= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Omega})$, le moment cinétique $\boldsymbol{L}(O)$ n'est pas colinéaire à $\boldsymbol{\Omega}$ et n'est donc pas porté par l'axe de rotation. Cela ne se produit que si $\boldsymbol{\Omega}$ est vecteur propre de l'opérateur d'inertie. C'est le cas si $\boldsymbol{\Omega}$ est porté par un axe principal d'inertie.

A noter que, si O est un point du solide fixe dans le référentiel, l'énergie cinétique du solide est :

$$E = \frac{1}{2}\iiint_S \boldsymbol{V}^2\, dm = \frac{1}{2}\iiint_S (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM})^2\, dm$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_S [\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{OM}]\, dm \qquad \text{où } [\ ,\ ,\ ] \text{ dénote le produit mixte}$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_S [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{OM}, \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM}]\, dm = \frac{1}{2} <\boldsymbol{\Omega}, \iiint_S \boldsymbol{OM} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM})\, dm>$$

$$= \frac{1}{2} <\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Omega})> = \frac{1}{2} J\Omega^2 \text{ où J est le moment d'inertie par rapport à l'axe porté par } \boldsymbol{\Omega}.$$

L'opérateur $\boldsymbol{J}$ vérifie le théorème de Koenig : l'opérateur d'inertie du solide par rapport à O est égal à la somme de l'opérateur d'inertie du solide par rapport à son centre d'inertie G et de l'opérateur d'inertie de G affecté de la masse totale M du solide par rapport à O. En effet :

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) = \iiint_S \boldsymbol{OM} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OM})\, dm$$

$$= \iiint_S (\boldsymbol{OG} + \boldsymbol{GM}) \wedge (\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{OG} + \boldsymbol{GM}))\, dm$$

$$= \iiint_S \boldsymbol{OG} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OG})\, dm + \iiint_S \boldsymbol{GM} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OG})\, dm$$

$$+ \iiint_S \boldsymbol{OG} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{GM})\, dm + \iiint_S \boldsymbol{GM} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{GM})\, dm$$

Or $\iiint_S \boldsymbol{OG} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OG})\, dm = M\, \boldsymbol{OG} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OG})$

et $\iiint_S \boldsymbol{GM} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OG})\,\mathrm{d}m = \left(\iiint_S \boldsymbol{GM}\ \mathrm{d}m\right) \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OG}) = 0$ puisque $\left(\iiint_S \boldsymbol{GM}\ \mathrm{d}m\right) = 0$

de même pour $\iiint_S \boldsymbol{OG} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{GM})\,\mathrm{d}m$. Il reste donc :

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) = \iiint_S \boldsymbol{GM} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{GM})\,\mathrm{d}m + \mathrm{M}\,\boldsymbol{OG} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OG})$$

soit $\boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{J}_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{u}) + \mathrm{M}\,\boldsymbol{OG} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OG})$

On en déduit le théorème de Huygens pour les moments d'inertie par rapport à un axe (O,$\boldsymbol{u}$) :

$$\mathrm{J} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \iiint_S \boldsymbol{GM} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{GM})\,\mathrm{d}m \rangle + \mathrm{M}\,\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{OG} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OG}) \rangle$$

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe (O,$\boldsymbol{u}$) est égal à la somme du moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (G,$\boldsymbol{u}$) et du moment d'inertie de G affecté de la masse M par rapport à l'axe (O,$\boldsymbol{u}$).

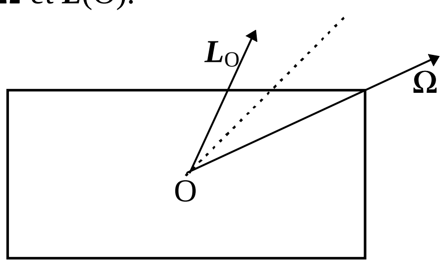
EXEMPLE 1 :

Considérons une plaque de masse m dans le plan Oxy, définie par $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$. Dans ce cas, $\boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}$ est définie par une intégrale double. La matrice d'inertie est $\begin{pmatrix} \frac{mb^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{3} \end{pmatrix}$

Supposons par exemple que la plaque tourne autour d'une de ses diagonales. On a $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,(\cos\theta\ \boldsymbol{i} + \sin\theta\ \boldsymbol{j})$ avec $\tan\theta = \frac{b}{a}$. Le moment cinétique est donc :

$$\boldsymbol{L}(\mathrm{O}) = \frac{\Omega m}{3}\,(b^2\cos\theta\ \boldsymbol{i} + a^2\sin\theta\ \boldsymbol{j})$$

La tangente de l'angle ($\boldsymbol{L}$(O),$\boldsymbol{i}$) vaut $\frac{1}{\tan\theta} = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$, autrement dit la bissectrice des droites O$\boldsymbol{i}$ et O$\boldsymbol{j}$ est également bissectrice de $\boldsymbol{\Omega}$ et $\boldsymbol{L}$(O).



EXEMPLE 2 :

Si la plaque est définie par $0 \le x \le 2a$, $0 \le y \le 2b$, on a, en utilisant le théorème de Kœnig :

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{J}_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{u}) + m\,\boldsymbol{OG} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OG})$$

avec $m\,\boldsymbol{OG} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OG}) = \mathrm{M}\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\right] = m\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -bz \\ az \\ bx - ay \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} b^2x - aby \\ a^2y - abx \\ (a^2+b^2)z \end{pmatrix}$

$$= m\,[\mathrm{OG}^2\boldsymbol{u} - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{OG} \rangle\,\boldsymbol{OG}]$$

opérateur de matrice $\begin{pmatrix} mb^2 & -mab & 0 \\ -mab & ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(a^2+b^2) \end{pmatrix}$. Il en résulte que la matrice de $\boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}$ est :

$$\begin{pmatrix} \frac{mb^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mb^2 & -mab & 0 \\ -mab & ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(a^2+b^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4mb^2}{3} & -mab & 0 \\ -mab & \frac{4ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4m(a^2+b^2)}{3} \end{pmatrix}$$

On peut aussi faire un calcul direct.

EXEMPLE 3 :

Considérons une surface cônique S de révolution de hauteur h, le rayon de la base circulaire étant R. On place le sommet en O et l'axe selon Oz. La matrice d'inertie se calcule au moyen d'intégrale double. On a, par symétrie, en prenant une densité surfacique égale à 1 :

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = \iint_{\mathrm{S}} (x^2 + z^2)\, \mathrm{d}m \quad \text{avec } x = \frac{\mathrm{R}}{h} z \cos\theta \text{ et } \mathrm{d}m = \frac{\mathrm{R}}{h} z\, \mathrm{d}\theta \frac{\sqrt{\mathrm{R}^2 + h^2}}{h} \mathrm{d}z$$

$$= m\left(\frac{\mathrm{R}^2}{4} + \frac{h^2}{2}\right)$$

$$\mathrm{C} = \iint_{\mathrm{S}} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}m \text{ avec } x^2 + y^2 = \frac{\mathrm{R}^2}{h^2} z^2 \text{ et } \mathrm{d}m = \frac{\mathrm{R}}{h} z\, \mathrm{d}\theta \frac{\sqrt{\mathrm{R}^2 + h^2}}{h} \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2} m\mathrm{R}^2$$

Les autres coefficients sont nuls donc la matrice est $\begin{pmatrix} m(\frac{\mathrm{R}^2}{4} + \frac{h^2}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & m(\frac{\mathrm{R}^2}{4} + \frac{h^2}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m\mathrm{R}^2 \end{pmatrix}$ Comme cas particulier, on obtient pour $h = 0$ la matrice d'inertie d'un disque relativement à ses axes principaux $\begin{pmatrix} \frac{m\mathrm{R}^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\mathrm{R}^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\mathrm{R}^2}{2} \end{pmatrix}$

EXEMPLE 4 :

Si le cône est plein, le même calcul, conduit avec des intégrales triples, donne :

$$\frac{3m}{5} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{R}^2}{4} + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{R}^2}{4} + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathrm{R}^2}{2} \end{pmatrix}$$

Si $\boldsymbol{\Omega}$ est porté par une génératrice du cône (cas où le cône roule sans glisser sur un plan par exemple), colinéaire à $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{R} \\ h \end{pmatrix}$, alors $\boldsymbol{L}(\mathrm{O})$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\mathrm{R}^2}{4} + h^2 \\ \dfrac{h\mathrm{R}}{2} \end{pmatrix}$. En général, $\boldsymbol{L}(\mathrm{O})$ n'est pas colinéaire à $\boldsymbol{\Omega}$ sauf si $\mathrm{R} = 2h$.

EXEMPLE 5 :

Pour une boule pleine de masse m de rayon r, la matrice d'inertie vaut $\frac{2}{5} mr^2\ \mathrm{I}$.

2- Polarisation

Considérons un corps, par exemple, un cristal plongé dans un champ électrique $\boldsymbol{E}$. Les électrons et les noyaux de chaque atome subissent des forces électrostatiques opposées qui tendent à créer, dans chaque élément de volume, un dipôle électrique. Il en résulte une polarisation globale par unité de volume $\boldsymbol{P}$. Dans un milieu homogène et isotrope et pour des valeurs de $\boldsymbol{E}$ pas trop grande, $\boldsymbol{P}$ est simplement proportionnelle à $\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}$ où χ s'appelle susceptibilité électrique. Si le milieu n'est pas isotrope, $\boldsymbol{P}$ est une fonction linéaire de $\boldsymbol{E}$. Il existe une transformation linéaire M telle que :

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{M}\boldsymbol{E}$$

qu'on peut encore écrire sous forme de composantes :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P}_x \\ \mathrm{P}_y \\ \mathrm{P}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{xx} & \mathrm{M}_{xy} & \mathrm{M}_{xz} \\ \mathrm{M}_{yx} & \mathrm{M}_{yy} & \mathrm{M}_{yz} \\ \mathrm{M}_{zx} & \mathrm{M}_{zy} & \mathrm{M}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}_x \\ \mathrm{E}_y \\ \mathrm{E}_z \end{pmatrix}$$

M est symétrique. En effet, l'énergie nécessaire à une polarisation est, par unité de volume, $\int \langle \boldsymbol{E}, \mathrm{d}\boldsymbol{P} \rangle$ où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire. Commençons par appliquer un champ électrique selon x, à savoir $\boldsymbol{E} = \mathrm{E}\boldsymbol{i}$, $0 \leq \mathrm{E} \leq \mathrm{E}_x$, ce qui nécessite une énergie $\int_0^{\mathrm{E}_x} \mathrm{E}\ \mathrm{M}_{xx}\ \mathrm{dE} = \frac{1}{2} \mathrm{M}_{xx}\ \mathrm{E}_x^{\ 2}$. Puis appliquons un champ électrique selon y, soit $\boldsymbol{E} = \mathrm{E}_x\boldsymbol{i} + \mathrm{E}\boldsymbol{j}$, $0 \leq \mathrm{E} \leq \mathrm{E}_y$. On a alors $\boldsymbol{P}$ de composantes $\begin{pmatrix} \mathrm{M}_{xx}\mathrm{E}_x + \mathrm{M}_{xy}\mathrm{E} \\ \mathrm{M}_{yx}\mathrm{E}_x + \mathrm{M}_{yy}\mathrm{E} \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ a pour composantes $\mathrm{dE}\begin{pmatrix} \mathrm{M}_{xy} \\ \mathrm{M}_{yy} \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc $\langle \boldsymbol{E}, \mathrm{d}\boldsymbol{P} \rangle = (\mathrm{E}_x\mathrm{M}_{xy} + \mathrm{E}\mathrm{M}_{yy})\ \mathrm{dE}$, donc $\int \langle \boldsymbol{E}, \mathrm{d}\boldsymbol{P} \rangle = \mathrm{M}_{xy}\mathrm{E}_x\mathrm{E}_y + \frac{1}{2} \mathrm{M}_{yy}\mathrm{E}_y^{\ 2}$. Le travail total est donc $\frac{1}{2} \mathrm{M}_{xx}\ \mathrm{E}_x^{\ 2} + \mathrm{M}_{xy}\mathrm{E}_x\mathrm{E}_y + \frac{1}{2} \mathrm{M}_{yy}\mathrm{E}_y^{\ 2}$. Si on avait commencé par appliquer un champ suivant y puis suivant x, les indices x et y auraient été inversés et le travail aurait été $\frac{1}{2} \mathrm{M}_{xx}\ \mathrm{E}_x^{\ 2} + \mathrm{M}_{yx}\mathrm{E}_x\mathrm{E}_y + \frac{1}{2} \mathrm{M}_{yy}\mathrm{E}_y^{\ 2}$. Les états initiaux et finaux étant identiques, le travail est le même selon les deux méthodes (principe de conservation de l'énergie). On en déduit que $\mathrm{M}_{xy} = \mathrm{M}_{yx}$. On raisonne de même pour les autres indices. On pourra également vérifier que le travail total pour appliquer un champ quelconque est $\mathrm{W} = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{E}, \mathrm{M}\boldsymbol{E} \rangle$, ou bien, si on note E les composantes $\boldsymbol{E}$, $\mathrm{W} = \frac{1}{2}\ {}^t\mathrm{EME}$, norme du produit scalaire défini par la matrice symétrique $\frac{1}{2}$ M.

Le fait qu'une matrice symétrique soit diagonalisable dans une base orthonormée signifie qu'il existe trois directions orthogonales de polarisation privilégiée, pour lesquelles $\boldsymbol{P}$ est colinéaire à $\boldsymbol{E}$, mais les coefficients de colinéarité ne sont pas forcément identiques. Ce sont les valeurs propres de la matrice M. Les valeurs propres sont identiques si le cristal possède les mêmes propriétés dans les trois directions, par exemple, s'il possède une structure cubique. Dans ce cas, la matrice M est non seulement diagonale, mais scalaire, et l'on retrouve alors la formule $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}$.

3- Champ des vitesses d'un solide

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ (ou tout autre espace euclidien E de dimension 3), un champ de vecteurs, i.e. une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, qui, à chaque point P de $\mathbb{R}^3$ associe un vecteur $\boldsymbol{V}(\mathrm{P})$. Nous dirons que ce champ est équiprojectif si :

$$\forall\ \mathrm{P},\ \forall\ \mathrm{Q},\ \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{P}), \boldsymbol{PQ}\rangle = \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{Q}), \boldsymbol{PQ}\rangle$$

Dans ce cas, on peut définir un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, qui, à un vecteur w de $\mathbb{R}^3$ associe $u(w) = \boldsymbol{V}(\mathrm{P}) - \boldsymbol{V}(\mathrm{O})$, si P est tel que $w = \boldsymbol{OP}$ (O étant un point arbitraire fixé). u est antisymétrique, puisque, si $w = \boldsymbol{OP}$ et $t = \boldsymbol{OQ}$, alors :

$$\begin{aligned}\langle u(w), t\rangle &= \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{P}) - \boldsymbol{V}(\mathrm{O}), \boldsymbol{OQ}\rangle = \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{P}), \boldsymbol{OQ}\rangle - \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{O}), \boldsymbol{OQ}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{P}), \boldsymbol{OQ}\rangle - \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{Q}), \boldsymbol{OQ}\rangle \text{ en utilisant l'équiprojectivité du champ } \boldsymbol{V} \\ &= \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{P}), \boldsymbol{OP} + \boldsymbol{PQ}\rangle - \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{Q}), \boldsymbol{OQ}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{P}), \boldsymbol{OP}\rangle + \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{P}), \boldsymbol{PQ}\rangle - \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{Q}), \boldsymbol{OQ}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{P}), \boldsymbol{OP}\rangle + \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{Q}), \boldsymbol{PQ}\rangle - \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{Q}), \boldsymbol{OQ}\rangle \text{ en utilisant de nouveau l'équiprojectivité.}\end{aligned}$$

Si on échange les rôles de w et t, on obtiendra :

$$\langle u(t), w\rangle = \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{Q}), \boldsymbol{OQ}\rangle + \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{P}), \boldsymbol{QP}\rangle - \langle \boldsymbol{V}(\mathrm{P}), \boldsymbol{OP}\rangle = -\langle u(w), t\rangle$$

En outre, u est bien linaire car, pour tout t, tout w et tout λ, on a :

$$\langle u(\lambda w), t\rangle = -\langle \lambda w, u(t)\rangle = -\lambda\langle w, u(t)\rangle = \lambda\langle u(w), t\rangle = \langle \lambda u(w), t\rangle$$

Cette relation étant vraie pour tout t, on a $u(\lambda w) = \lambda u(w)$. On montre de même que $u(w + w') = u(w) + u(w')$.

u étant linéaire antisymétrique, il existe $\boldsymbol{\Omega}$ tel que $u(w) = \boldsymbol{\Omega} \wedge w$ pour tout vecteur w. Le champ $\boldsymbol{V}$ vérifie alors : $\boldsymbol{V}(\mathrm{P}) = \boldsymbol{V}(\mathrm{O}) + u(\boldsymbol{OP}) = \boldsymbol{V}(\mathrm{O}) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OP}$. Un champ vérifiant une telle relation est qualifié de champ de torseur. $\boldsymbol{V}(\mathrm{P})$ est le moment du champ en P. $\boldsymbol{\Omega}$ est la résultante du champ.

Ce cas de figure est vérifié par le champ des vitesses $\boldsymbol{V}$ des points d'un solide en mouvement par rapport à E en un instant donné, puisque l'on a, pour tout point P et Q de ce solide :

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{Cte} \Rightarrow \boldsymbol{PQ}^2 = \mathrm{Cte} \Rightarrow \langle \boldsymbol{PQ}, \boldsymbol{V}(\mathrm{Q}) - \boldsymbol{V}(\mathrm{P})\rangle = 0 \text{ en dérivant}$$

Le champ des vitesses à tout instant donné vérifie donc la relation $\boldsymbol{V}(\mathrm{P}) = \boldsymbol{V}(\mathrm{O}) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OP}$. Le vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ s'appelle vecteur instantané de rotation du solide par rapport à E.

Cela s'applique en particulier pour le mouvement plan sur plan. Si $\boldsymbol{\Omega}$ est nul à un instant donné, toutes les vitesses sont égale à $\boldsymbol{V}(\mathrm{O})$. Le champ des vitesses est identique à cet instant au champ des vitesses d'un mouvement de translation. Si $\boldsymbol{\Omega}$ est non nul, il existe un point O dont la vitesse est nulle à cet instant donné. O s'appelle centre instantané de rotation. On le trouve en résolvant l'équation $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OP} = \boldsymbol{V}(\mathrm{P})$, où P est un point arbitraire, au moyen d'une division vectorielle.

Les torseurs sont détaillés dans l'annexe qui suit.

Annexe IV : les torseurs

Un champ de vecteurs $\boldsymbol{V}$ en dimension 3 est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, ou plus généralement de E dans E ou E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

(i) Ce champ est dit champ de torseur si il existe un vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ tel que:

$$\forall \text{ P}, \forall \text{ Q}, \boldsymbol{V}(\text{P}) = \boldsymbol{V}(\text{Q}) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{QP} = \boldsymbol{V}(\text{Q}) + \boldsymbol{PQ} \wedge \boldsymbol{\Omega}$$

(ii) Ce champ est dit équiprojectif si :

$$\forall \text{ P}, \forall \text{ Q}, \langle \boldsymbol{V}(\text{P}), \boldsymbol{PQ} \rangle = \langle \boldsymbol{V}(\text{Q}), \boldsymbol{PQ} \rangle$$

Ces deux notions sont équivalentes. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est triviale. La réciproque, beaucoup moins évidente, a été montrée dans l'annexe précédente. Un champ $\boldsymbol{V}$ possédant ces deux propriétés équivalentes est appelé torseur. $\boldsymbol{V}$(P) est le moment du champ en P. $\boldsymbol{\Omega}$ est la résultante du champ. $\boldsymbol{\Omega}$ est unique car si un autre vecteur $\boldsymbol{\Omega}'$ vérifie (i), alors, on a :

$$\forall w, \boldsymbol{\Omega} \wedge w = \boldsymbol{\Omega}' \wedge w$$

et cela implique que $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}'$ (considérer par exemple la matrice antisymétrique associée à chacun des deux produits vectoriels. Les deux matrices sont égales, donc leurs coefficients sont égaux, or les coefficients des matrices permettent de reconstituer $\boldsymbol{\Omega}$ et $\boldsymbol{\Omega}'$). Pour connaître un torseur en tout point, il suffit d'après (i) d'en connaître la résultante et le moment en un point. On définit donc un torseur en un point par le couple ($\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{V}$(P)) = (***Résultante***, ***Moment*** en un point P).

- **Exemples de torseurs** :

Il existe en physique principalement quatre torseurs :

le torseur cinématique d'un solide qui est introduit au moyen de l'équiprojectivité (ii).

les torseurs cinétiques, dynamiques ou des forces qui sont définis comme sommes de torseurs élémentaires vérifiant (i)

❑ Le torseur cinématique d'un solide

Dans le § III-3), nous avons montré que le champ des vitesses $\boldsymbol{V}$ des points d'un solide par rapport à un référentiel donné était équiprojectif. Il s'agit donc d'un torseur, dit torseur cinématique du solide. La résultante $\boldsymbol{\Omega}$ est appelée vecteur instantané de rotation. Ce torseur peut varier au cours du temps, de sorte que $\boldsymbol{\Omega}$ dépend du temps.

Dans la présentation des torseurs faites ci-dessus, nous avons d'ailleurs utilisé des notations relatives au torseur cinématique.

❑ Le torseur cinétique d'un point ou d'un système de point

Soit A un point affecté d'une masse m et d'une vitesse $\boldsymbol{V}$ par rapport à un référentiel donné. Si l'on choisit un point O quelconque, on peut définir le torseur cinétique de A par :

$$\begin{cases} \text{la résultante} = m\boldsymbol{V} \\ \text{le moment cinétique de A en O} = \boldsymbol{OA} \wedge m\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}(\text{O}) \end{cases}$$

$\boldsymbol{L}$ définit un champ de torseur. En effet, le moment cinétique de A en un autre point P est tel que :

$$\boldsymbol{L}(\text{P}) = \boldsymbol{PA} \wedge m\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}(\text{O}) + \boldsymbol{PO} \wedge m\boldsymbol{V}$$

S'il y a plusieurs point A_i de masse m_i et de vitesse $\boldsymbol{V}_i$, alors le torseur cinétique sera défini par la somme de chacun des torseurs élémentaires définis par chaque A_i, à savoir :

la résultante = $\sum m_i\boldsymbol{V}_i = \text{M}\boldsymbol{V}_\text{G}$ où M = $\sum m_i$ et $\boldsymbol{V}_\text{G}$ est la vitesse du barycentre G des points A_i

le moment cinétique en O = $\boldsymbol{L}(\text{O}) = \sum \boldsymbol{OA}_i \wedge m\boldsymbol{V}_i$

Dans le cas d'une densité de points A affectés d'une densité de masse dm et de vitesses $\boldsymbol{V}$, on remplace le symbole $\sum$ par une intégrale simple, double ou triple, suivant qu'il s'agit d'une densité linéique, surfacique ou volumique.

❑ Moment du torseur cinétique d'un solide en un point fixe de ce solide

Considérons un solide S tel que le torseur cinématique des vitesses soit donné en un point M de S par ($\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{V}$(M)). Cherchons quel est le torseur cinétique de ce solide où chaque point M du solide est affecté d'une densité de masse dm. Supposons qu'il existe un point O du solide S, fixe par rapport au référentiel choisi (de sorte que $\boldsymbol{V}$(O) = 0). Le moment cinétique du solide en O est :

$$\boldsymbol{L}(\mathrm{O}) = \iiint_S \boldsymbol{OM} \wedge \boldsymbol{V}(\mathrm{M})\, \mathrm{d}m$$

mais le champ des vitesses est un torseur. O étant un point de S fixe par rapport au référentiel, on a $\boldsymbol{V}(\mathrm{M}) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM}$, donc :

$$\boldsymbol{L}(\mathrm{O}) = \iiint_S \boldsymbol{OM} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM})\, \mathrm{d}m = \iiint_S \mathrm{OM}^2\, \boldsymbol{\Omega}\ \ \mathrm{d}m - \iiint_S <\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{\Omega}>\, \boldsymbol{OM}\, \mathrm{d}m$$

Notons $\boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}$ l'opérateur linéaire dit opérateur d'inertie relativement à O qui, à tout vecteur $\boldsymbol{u}$ associe

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{u}) = \iiint_S \boldsymbol{OM} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OM})\, \mathrm{d}m = \iiint_S \mathrm{OM}^2\, \boldsymbol{u}\ \ \mathrm{d}m - \iiint_S <\boldsymbol{OM},\boldsymbol{u}>\, \boldsymbol{OM}\, \mathrm{d}m$$

On a donc $\boldsymbol{L}(\mathrm{O}) = \boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{\Omega})$. On a montré dans le § III-5) que $\boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}$ est un opérateur symétrique, autrement dit que $<\boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{u},\boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{v})>$, donc sa matrice dans un repère orthonormé est une matrice symétrique, dite matrice d'inertie. Etant symétrique, elle est diagonalisable dans un repère orthonormé dont les axes sont appelés axes principaux d'inertie.

On notera que l'expression :

$$\boldsymbol{L}(\mathrm{G}) = \iiint_S \boldsymbol{GM} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{GM})\, \mathrm{d}m = \boldsymbol{J}_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\Omega})$$

est valide au centre d'inertie G du solide, même si G est mobile. En effet :

$$\boldsymbol{L}(\mathrm{G}) = \iiint_S \boldsymbol{GM} \wedge \boldsymbol{V}(\mathrm{M})\, \mathrm{d}m = \iiint_S \boldsymbol{GM} \wedge (\boldsymbol{V}(\mathrm{G}) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{GM})\, \mathrm{d}m$$

$$= \iiint_S \boldsymbol{GM} \wedge \boldsymbol{V}(\mathrm{G})\, \mathrm{d}m + \iiint_S \boldsymbol{GM} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{GM})\, \mathrm{d}m$$

Mais on a $\iiint_S \boldsymbol{GM} \wedge \boldsymbol{V}(\mathrm{G})\, \mathrm{d}m = \left(\iiint_S \boldsymbol{GM}\, \mathrm{d}m\right) \wedge \boldsymbol{V}(\mathrm{G}) = 0$ car $\iiint_S \boldsymbol{GM}\, \mathrm{d}m = 0$ par définition de G.

Par contre, si O est un point quelconque, lié au solide ou non, mobile ou non, l'expression de $\boldsymbol{L}$(O) comme étant égale à $\boldsymbol{J}_{\mathrm{O}}(\boldsymbol{\Omega})$ n'est plus valide. Le plus simple est alors de se ramener en G, en utilisant le fait que $\boldsymbol{L}$ est un torseur de résultante $\mathrm{M_S}\boldsymbol{V}_{\mathrm{G}}$ où $\mathrm{M_S}$ désigne ici la masse du solide. On a alors :

$$\boldsymbol{L}(\mathrm{O}) = \boldsymbol{L}(\mathrm{G}) + \boldsymbol{OG} \wedge \mathrm{M_S}\boldsymbol{V}_{\mathrm{G}}$$
$$= \boldsymbol{J}_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{OG} \wedge \mathrm{M_S}\boldsymbol{V}_{\mathrm{G}}$$

❑ Le torseur dynamique d'un point ou d'un système de point

Soit A un point affecté d'une masse m et d'une accélération $\boldsymbol{a}$ par rapport à un référentiel donné. Si l'on choisit un point O quelconque, on peut définir le torseur dynamique de A par :

$$\begin{cases} \text{la résultante} = m\boldsymbol{a} \\ \text{le moment dynamique de A en O} = \boldsymbol{OA} \wedge m\boldsymbol{a} = \delta(\text{O}) \end{cases}$$

δ définit un champ de torseur. En effet, le moment dynamique de A en un autre point P est tel que :

$$\delta(\text{P}) = \boldsymbol{PA} \wedge m\boldsymbol{a} = \delta(\text{O}) + \boldsymbol{PO} \wedge m\boldsymbol{a}$$

Le torseur dynamique δ n'est autre que la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique $\boldsymbol{L}$ à condition que O soit considéré comme fixe dans le référentiel considéré. En effet :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}(\text{O}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{OA} \wedge m\boldsymbol{V}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OA}}{\mathrm{d}t} \wedge m\boldsymbol{V} + \boldsymbol{OA} \wedge \frac{\mathrm{d}m\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{V} \wedge m\boldsymbol{V} + \boldsymbol{OA} \wedge m\boldsymbol{a}$$
$$= \boldsymbol{OA} \wedge m\boldsymbol{a} = \delta(\text{O})$$

S'il y a plusieurs point A_i de masse m_i et d'accélération $\boldsymbol{a}_i$, alors le torseur dynamique sera défini par la somme de chacun des torseurs élémentaires définis par chaque A_i, à savoir :

la résultante = $\sum m_i\boldsymbol{a}_i = \text{M}\boldsymbol{a}_\text{G}$ où $\text{M} = \sum m_i$ et $\boldsymbol{a}_\text{G}$ est l'accélération du barycentre G des A_i

le moment dynamique en O = $\delta(\text{O}) = \sum \boldsymbol{OA}_i \wedge m\boldsymbol{a}_i$

Comparons $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}(\text{O})}{\mathrm{d}t}$ et $\delta(\text{O})$. On a :

$$\boldsymbol{L}(\text{O}) = \sum \boldsymbol{OA}_i \wedge m\boldsymbol{V}_i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}(\text{O})}{\mathrm{d}t} = \sum \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OA}_i}{\mathrm{d}t} \wedge m\boldsymbol{V}_i + \sum \boldsymbol{OA}_i \wedge \frac{\mathrm{d}m\boldsymbol{V}_i}{\mathrm{d}t}$$
$$= \sum (\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_\text{O}) \wedge m\boldsymbol{V}_i + \sum \boldsymbol{OA}_i \wedge m\boldsymbol{a}_i$$
$$= -\boldsymbol{V}_\text{O} \wedge \sum m\boldsymbol{V}_i + \delta(\text{O})$$
$$= -\boldsymbol{V}_\text{O} \wedge \text{M}\boldsymbol{V}_\text{G} + \delta(\text{O})$$

de sorte que, comme précédemment, $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}(\text{O})}{\mathrm{d}t} = \delta(\text{O})$ si O est un point fixe par rapport au référentiel choisi, mais aussi si O coïncide avec le barycentre G, même si celui-ci est mobile.

Dans le cas d'une densité de points A affectés d'une densité de masse dm et d'accélérations $\boldsymbol{a}$, on remplace le symbole $\sum$ par une intégrale simple, double ou triple, suivant qu'il s'agit d'une densité linéique, surfacique ou volumique.

❑ Le torseur des forces appliquées en un point ou en un système de points

Reprenons notre point A et supposons qu'une force $\boldsymbol{F}$ s'applique en A. Si l'on choisit un point O quelconque, on peut définir le torseur de force en O par :

$$\begin{cases} \text{la résultante} = \boldsymbol{F} \\ \text{le moment de la force en O} = \boldsymbol{M}(\text{O}) = \boldsymbol{OA} \wedge \boldsymbol{F} \end{cases}$$

$\boldsymbol{M}$ définit un torseur. En effet, le moment de la force calculé en un autre point P est tel que :

$$\boldsymbol{M}(\text{P}) = \boldsymbol{PA} \wedge \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}(\text{O}) + \boldsymbol{PO} \wedge \boldsymbol{F}$$

Le principe fondamental de la dynamique énonce qu'il y a identité entre le torseur dynamique calculé dans un référentiel galiléen et le torseur des forces. O étant choisi fixe dans le référentiel pour pouvoir identifier le torseur dynamique à la dérivée du torseur cinétique, on écrit :

$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ (théorème de la quantité de mouvement)

$\boldsymbol{OA} \wedge \boldsymbol{F} = \delta(\text{O}) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}(\text{O})}{\mathrm{d}t}$ (théorème du moment cinétique)

Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut, dans le torseur des forces, tenir compte des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

S'il y a plusieurs point A_i où s'appliquent des forces $\boldsymbol{F}_i$, alors le torseur des forces sera défini par la somme de chacun des torseurs élémentaires définis par chaque A_i, à savoir :

la résultante = $\sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}$

le moment en O = $\boldsymbol{M}(O) = \sum \boldsymbol{OA}_i \wedge \boldsymbol{F}_i$

On peut aussi remplacer $\sum$ par des intégrales dans le cas d'une densité de points.

Le principe fondamental de la dynamique s'énoncera alors sous la forme suivante, dans un repère galiléen où O est fixe :

$\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a}_G$ (théorème de la quantité de mouvement)

$\boldsymbol{M}(O) = \dfrac{d\boldsymbol{L}(O)}{dt}$ (théorème du moment cinétique)

Dans le cas statique, c'est à dire où le système de points est immobile par rapport au référentiel, le torseur des forces, qualifié alors de torseur statique est nul.

$\boldsymbol{F} = 0$

$\boldsymbol{M}(O) = 0$

- **Cas particuliers de torseurs**

❑ Torseur nul

Sa résulante est nulle, ainsi que son moment en un point (et donc en tout point). Le champ de vecteurs est identiquement nul.

EXEMPLE : le torseur des forces dans le cas statique est le torseur nul.

❑ Couples

Ce sont les torseurs dont la résultante est nulle. Le champ est donc constant.

EXEMPLE 1 :
Le torseur des forces $\boldsymbol{F}$ appliquée en un point A et $-\boldsymbol{F}$ appliquée en un point B est un couple. Le moment ne dépend pas du point où il est calculé.

EXEMPLE 2 :
Le torseur cinématique d'un solide est un couple si et seulement si le mouvement est un mouvement instantané de translation. Le vecteur de rotation instantané est nul.

❑ Glisseurs

Il s'agit d'un torseur élémentaire défini au moyen d'un point A et d'une résultante $\boldsymbol{R}$ par :

$\boldsymbol{M}(O) = \boldsymbol{OA} \wedge \boldsymbol{R}$

EXEMPLE 1 :
Dans le cas d'un point unique A, les torseurs cinétiques, dynamiques ou de forces que nous avons définis plus haut sont des glisseurs. Dans le cas de plusieurs point A_i, on obtient les torseurs cinétiques, dynamiques ou de forces en sommant les glisseurs relatifs à chaque point A_i.

EXEMPLE 2 :

Le champ des vitesses d'un solide tournant à la vitesse angulaire ω autour d'un axe (A, $\boldsymbol{u}$) ($\boldsymbol{u}$ unitaire) est le glisseur de résultante $\omega\boldsymbol{u}$. En effet, tout point P du solide possède la vitesse :

$$\boldsymbol{V}(\mathrm{P}) = \omega\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{AP}$$

Dans la définition d'un glisseur, on peut remplacer A par un point B appartenant à la droite (A, $\boldsymbol{R}$). Cette droite est appelée axe du glisseur. Dans l'exemple 2, il s'agit de l'axe de rotation du solide.

$$\boldsymbol{M}(\mathrm{O}) = \boldsymbol{OA} \wedge \boldsymbol{R} = (\boldsymbol{OB} + \boldsymbol{BA}) \wedge \boldsymbol{R}$$
$$= \boldsymbol{OB} \wedge \boldsymbol{R} \qquad \text{puisque } \boldsymbol{R} \text{ et } \boldsymbol{AB} \text{ sont colinéaires.}$$

- **Propriétés d'un torseur**

❑ Axe central d'un torseur

Considérons un torseur de résultante $\boldsymbol{R}$ non nulle. Alors les points P tels que $\boldsymbol{M}(\mathrm{P})$ soit colinéaire à $\boldsymbol{R}$ forme une droite appelée axe central d'un torseur.
En effet, soit O un point quelconque. Posons $\boldsymbol{R} = \mathrm{R}\boldsymbol{u}$ avec $\boldsymbol{u}$ unitaire. On cherche les P tels que :

$$\boldsymbol{M}(\mathrm{P}) \wedge \boldsymbol{R} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{M}(\mathrm{O}) + \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{OP}) \wedge \boldsymbol{R} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{M}(\mathrm{O}) \wedge \boldsymbol{R} + \mathrm{R}^2\, \boldsymbol{OP} - \langle \boldsymbol{OP}, \boldsymbol{R} \rangle\, \boldsymbol{R} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{M}(\mathrm{O}) \wedge \boldsymbol{R} + \mathrm{R}^2(\boldsymbol{OP} - \langle \boldsymbol{OP}, \boldsymbol{u} \rangle\, \boldsymbol{u}) = 0$$

Le vecteur $\boldsymbol{OP} - \langle \boldsymbol{OP}, \boldsymbol{u} \rangle\, \boldsymbol{u}$ est la projection orthogonale de $\boldsymbol{OP}$ sur le plan orthogonal à $\boldsymbol{u}$. On écrit donc que cette projection est constante, égale à $-\frac{1}{\mathrm{R}} \boldsymbol{M}(\mathrm{O}) \wedge \boldsymbol{u}$, de sorte que les vecteurs P cherchés sont tels que :

$$\boldsymbol{OP} = -\frac{1}{\mathrm{R}} \boldsymbol{M}(\mathrm{O}) \wedge \boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{u}$$

Il s'agit d'une droite dont un vecteur directeur est la résultante. Tous les points de l'axe central ont même moment.

EXEMPLE :
Dans le cas d'un glisseur, les points de l'axe du glisseur ont un moment nul, donc colinéaire à la résultante. L'axe central d'un glisseur n'est autre que l'axe du glisseur (cohérence du vocabulaire).

❑ Réduction canonique d'un torseur

Soit un torseur de résultante $\boldsymbol{R}$ non nulle. Ce torseur possède un axe central. Choisissons O sur cet axe. Le torseur est défini par :

la résultante $\boldsymbol{R}$
le moment $\boldsymbol{M}(\mathrm{O})$

Il est la somme des deux torseurs suivants ;

un glisseur	un couple
de résultante $\boldsymbol{R}$	de résultante nulle
de moment nul en O	de moment constant égal à $\boldsymbol{M}(\mathrm{O})$

Cette décomposition est appelée décomposition canonique. Elle est telle que la résultante du torseur est colinéaire au moment du couple.

EXEMPLE :
Dans le cas du torseur cinématique d'un solide de résultante le vecteur de rotation instantané $\boldsymbol{\Omega}$, les points de l'axe central ont une vitesse colinéaire à $\boldsymbol{\Omega}$. Le torseur champ des vitesses est la somme de :

un champ de vitesses qui est un glisseur. Il s'agit d'un mouvement instantané de rotation d'axe l'axe central du torseur.

un champ de vitesses qui est un couple, dont le moment est colinéaire à **Ω**. Il s'agit d'une translation parallèlement à **Ω**.
La composition de ces deux mouvements, définissant le torseur initial des vitesses, est un mouvement instantané hélicoïdal d'axe l'axe central du torseur. Tout champ de vitesses d'un solide est un mouvement hélicoïdal instantané, pouvant dégénérer en un mouvement instantané de rotation ou un mouvement instantané de translation.

❑ Invariant scalaire d'un torseur
Il s'agit de la quantité <***M***(O), ***R***> dont on vérifie aisément qu'elle ne dépend pas du point O choisi. Un torseur est un couple ou un glisseur si et seulement si cet invariant est nul. (ou bien ***R*** est nul, ou bien les points de l'axe central ont un moment nul).

◆