ESPACES VECTORIELS NORMES

PLAN

I : Normes

1- Définition

La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ ou le module sur $\mathbb{C}$ permettent de définir des distances sur ces espaces, et de pouvoir parler de limites. Nous souhaitons étendre ces notions à des espaces plus généraux. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DEFINITION :
On appelle norme sur E*, notée usuellement* $\|\ \|$ *ou* N*, une application de* E *dans* $\mathbb{R}^+$ *telle que :*

i) $\forall x \in \mathrm{E},\ \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii) $\forall x \in \mathrm{E},\ \forall y \in \mathrm{E},\ \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$
iii) $\forall x \in \mathrm{E},\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \| \lambda x \| = |\lambda|\ \| x \|$

La propriété ii) est connue sous le nom d'inégalité triangulaire. On en déduit la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \forall y \in \mathrm{E},\ \big|\| x \| - \| y \|\big| \leq \| x + y \|$$

En effet :

$\| x \| = \| x + y - y \| \leq \| x + y \| + \| -y \| = \| x + y \| + \| y \|$

donc $\| x \| - \| y \| \leq \| x + y \|$

de même :

$$\| y \| - \| x \| \leq \| x + y \|$$

donc $\big| \| x \| - \| y \| \big| \leq \| x + y \|$

Les normes permettent de définir une distance.

DEFINITION :

Une distance sur un ensemble E *est une application de* E × E *dans* $\mathbb{R}^+$ *telle que :*

i) $\forall x, \forall y, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
ii) $\forall x, \forall y, \forall z, d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
iii) $\forall x, \forall y, d(x,y) = d(y,x)$

La propriété ii) est connue sous le nom d'inégalité triangulaire. Un espace normé est muni d'une distance. Il suffit de poser :

$$\mathrm{d}(x,y) = \| x - y \|$$

2- Exemples

Voici des exemples de normes :

❑ Espaces de dimension finie sur $\mathbb{R}$: au moyen d'une base, on se ramène à $\mathbb{R}^n$. Si X est un élément de $\mathbb{R}^n$ de composantes $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a :.

- $N_2(X) = \| X \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (norme euclidienne).

Cette norme est associée au produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t XY$ par la relation $\| x \|_2 = \sqrt{\langle x,x \rangle}$.

Plus généralement tout espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ dispose de la norme euclidienne.

- $N_1(X) = \| X \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (norme du chauffeur de taxi new–yorkais. Elle correspond en effet pour $n = 2$ à la distance parcourue par un taxi dans une ville où les rues sont à angles droits)

- $N_\infty(X) = \| X \|_\infty = \mathrm{Max}\ \{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$ (norme du joueur d'échecs ou, plus classiquement, norme dite uniforme. Elle correspond à la distance séparant deux cases pour un roi du jeu d'échecs qui se déplace d'une case à la fois dans les huit directions possibles)

L'utilisation de l'indice infini provient du fait que l'on peut définir une norme $\| X \|_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^\alpha \right)^{1/\alpha}$, pour $\alpha \geq 1$, et que la norme uniforme s'obtient en prenant la limite de la norme α en $+\infty$.

Seule la propriété ii) n'est pas évidente pour la norme euclidienne. Elle est prouvée dans le chapitre *Espaces Euclidiens* du cours de première année (ESPEUCL.PDF)

❑ Espaces de dimension finie sur $\mathbb{C}$: au moyen d'une base, on se ramène à $\mathbb{C}^n$. Si Z est un élément de $\mathbb{C}^n$ de composantes $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$, on a :

- $N_1(Z) = \| Z \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z_i|$
- $N_2(Z) = \| Z \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}$. Nous admettrons qu'il s'agit d'une norme.
- $N_\infty(Z) = \| Z \|_\infty = \text{Max } \{|z_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$ (norme uniforme)

❑ Espaces de matrices :

$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, on peut prendre les normes qui précèdent. Le cas de la norme euclidienne des matrices carrées présente un intérêt particulier. On peut en effet remarquer que le produit scalaire de deux matrices, coefficients par coefficients, n'est autre que $\text{Tr}({}^t\text{AB})$ où Tr est la trace (somme des éléments diagonaux). La norme n'est autre que $\sqrt{\text{Tr}({}^t\text{AA})}$.

❑ Espaces de dimension infinie :

Il s'agit essentiellement des espaces préhilbertiens et des espaces de fonctions. Considérons l'espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes. On dispose de :

- $N_1(f) = \| f \|_1 = \int_I |f(t)| \, dt$. Si I n'est pas un segment, on se restreint aux fonctions continues intégrables sur I. Si f est continue par morceaux, $N_1(f)$ peut être nul alors que f est non nulle en certains points.
- $N_2(f) = \| f \|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 \, dt}$. Si I n'est pas un segment, on se restreint aux fonctions continues de carrés intégrables sur I. Si f est continue par morceaux, $N_2(f)$ peut être nul alors que f est non nul en certains points. Dans le cas réel, cette norme est une norme euclidienne provenant du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_I f(t)g(t) \, dt$. Dans le cas complexe, on admettra l'inégalité triangulaire.
- $N_\infty(f) = \| f \|_\infty = \text{Sup } \{|f(t)| \mid t \in \text{I}\}$ (norme uniforme sur l'espace des fonctions continues). Cela s'applique également aux fonctions continues par morceaux sur I.

Un exemple particulier d'espace de fonctions est constitué des espaces de suites (fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si $u = (u_n)$ est une suite, on définit :

- $N_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ sur l'espace l^1 des suites sommables.

- $N_2(u) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2}$ sur l'espace l^2 des suites de carrés sommables. Dans le cas réel, cette norme est une norme euclidienne provenant du produit scalaire $<u,v> = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, v_n$. Dans le cas complexe, on admettra que l'inégalité triangulaire est vérifiée.
- $N_\infty(u) = \mathrm{Sup}\ \{ |u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ sur l'espace des suites bornées l^∞.

3- Convergence d'une suite vectorielle

Une suite réelle ou complexe (u_n) converge vers l si :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N, \forall\ n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$$

Une suite dans un espace normé (u_n) converge vers l si :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N, \forall\ n \geq N, \| u_n - l \| < \varepsilon$$

autrement dit, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \| u_n - l \| = 0$. Par différence avec l, on se ramène donc à une suite convergeant vers 0. Pour prouver la convergence de (u_n) vers 0, il suffit de majorer $\| u_n \|$ par une suite réelle (α_n) convergeant vers 0.

Si (u_n) est une suite vectorielle et (α_n) une suite réelle positive telle que :

$$\exists\ C, \forall\ n, \| u_n \| \leq C\, \alpha_n \text{ (i.e. } (\frac{u_n}{\alpha_n}) \text{ est bornée)}$$

on dit que la suite (u_n) est dominée par la suite (α_n) et on écrit que $u_n = O(\alpha_n)$.

Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_n}{\alpha_n} = 0$, on dit que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (α_n) et on écrit que $u_n = o(\alpha_n)$.

Comme pour les suites réelles, on montre que, si (u_n) et (v_n) sont deux suites de vecteurs qui convergent, alors il en est de même de la somme et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n + v_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n + \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$. De même, si une suite de scalaires (λ_n) (réels ou complexes) convergent, ainsi qu'une suite (u_n) de vecteurs, il en est de même de la suite $(\lambda_n u_n)$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \lambda_n u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \lambda_n \times \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

On notera également que l'inégalité triangulaire $\big|\| u_n \| - \| l \|\big| \leq \| u_n - l \|$ permet de montrer que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l \Rightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} \| u_n \| = \| l \|$$

(La norme est une application continue).

Dans un espace de dimension finie E muni d'une base $(e_1, ..., e_p)$, on peut considérer les composantes de u_n suivant cette base. Nous noterons $u_n(i)$ la $i^{\text{ème}}$ composante.

PROPOSITION

Soit (u_n) *une suite dans un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme* N. *Il y a équivalence entre :*

i) *La suite* (u_n) *converge pour la norme* N *vers un élément* l

ii) *Pour tout* i, *la suite des composantes* $(u_n(i))$ *converge vers* $l(i)$

Autrement dit, il suffit de raisonner composante par composante.

Démonstration (partielle) :
❑ ii) $\Rightarrow$ i)
Appelons N_1 la norme somme des valeurs absolues (ou des modules) des composantes. On a, pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{p} x_i\, e_i$:

$$N(x) = N(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, N(e_i) \leq C \sum_{i=1}^{n} |x_i| = CN_1(x) \text{ où } C = \text{Max } \{N(e_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

En particulier :

$$N(u_n - l) \leq CN_1(u_n - l) = C \sum_{i=1}^{p} |u_n(i) - l(i)|$$

donc si chaque suite $(|u_n(i) - l(i)|)$ tend vers 0, il en est de même de leur somme, et donc de $N(u_n - l)$.

❑ i) $\Rightarrow$ ii)
La réciproque est plus délicate. Elle repose sur une inégalité inverse de celle déjà prouvée $N \leq CN_1$. Nous admettrons qu'il existe une constante C' telle que $N_1 \leq C'N$ (une démonstration est donnée en annexe). On dit dans ce cas que les normes N et N_1 sont équivalentes. On a alors, pour tout i :

$$|u_n(i) - l(i)| \leq \sum_{i=1}^{p} |u_n(i) - l(i)| = N_1(u_n - l) \leq C'N(u_n - l)$$

Donc si $N(u_n - l)$ tend vers 0, il en est de même de chaque composante.

Ainsi, la notion de convergence dans un espace vectoriel de dimension finie ne dépend pas de la norme. Si une suite tend vers 0 pour une norme donnée, alors elle tend vers 0 pour toute autre norme.

Il n'en est pas de même en dimension infinie. Pour n supérieur ou égal à 1, soit f_n la fonction définie sur [0,1] par :

$f_n(0) = \sqrt{n}$

$f_n(\frac{1}{n}) = 0$

f_n est affine sur $[0, \frac{1}{n}]$, soit $f_n(x) = \sqrt{n}\,(1 - nx)$

$f_n = 0$ pour $x \geq 1$

alors, on a:

$$N_1(f_n) = \frac{1}{2\sqrt{n}},\ N_2(f_n) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } N_\infty(f_n) = \sqrt{n}$$

On voit que la suite (f_n) tend vers 0 pour la norme N_1, qu'elle ne tend pas vers 0 pour la norme N_2 mais qu'elle est bornée pour cette norme, qu'elle tend vers l'infini pour la norme N_∞. ***Dire que la suite des f_n converge n'a pas de sens, si l'on ne précise pas de quelle norme il s'agit***. En particulier, on dit que :

une suite (f_n) converge uniformément vers f si $\lim_{n \to +\infty} N_\infty(f_n - f) = 0$,

(f_n) converge vers f en moyenne si $\lim\limits_{n\to+\infty} N_1(f_n - f) = 0$,

(f_n) converge vers f en moyenne quadratique si $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(f_n - f) = 0$.

Remarquons que, pour tout f continue sur $[0,1]$:

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,dt = \langle |f(t)|, 1\rangle \qquad \text{(produit scalaire)}$$

$$\leq N_2(f)\,N_2(1) = N_2(f) \qquad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz}$$

et $\quad N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,dt} \leq N_\infty(f)$

mais la suite (f_n) donnée au-dessus montre qu'il est impossible de trouver des constantes C telles $N_2 \leq CN_1$ ou $N_\infty \leq CN_2$, contrairement à ce qui se passe en dimension finie.

II : Vocabulaire

Le vocabulaire qui suit permet de mieux cerner les notions relatives aux limites. On se place dans un espace E muni d'une norme notée N ou $\|\ \ \|$. On admettra qu'en dimension finie, ces notions ne dépendent pas de la norme utilisée.

1– Boules

On appelle boule (ouverte) $B(x,R)$ de centre x de rayon R l'ensemble $\{y \mid d(x,y) < R\}$ ou $\{y \mid \| x - y \| < R\}$. Les boules de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ouverts $]a,b[$. Nous dirons qu'une propriété est vraie au voisinage de x_0 s'il existe R tel que la propriété soit vraie dans la boule $B(x_0,R)$. La notion de boule intervient dans la définition des limites. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |a_n - l| < \varepsilon$$

ou de manière équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, a_n \in\ ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$

Dans un espace normé, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \| a_n - l \| < \varepsilon$$

ou de manière équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, a_n \in B(l,\varepsilon)$$

Les boules jouent donc dans un espace normé le rôle des intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$.

A est une partie bornée de E si elle est contenue dans une boule.

$$\exists x, \exists R, \forall y \in A, \| x - y \| < R$$

2– Points intérieurs à une partie, ouverts

On souhaite définir une notion qui généralise le résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \text{ et } l \in\ ]a,b[\ \Rightarrow \exists N, \forall n \geq N, a_n \in\ ]a,b[$$

La propriété est vraie car l est à l'intérieur de l'intervalle (et non à l'une des bornes). Dans un espace normé, on aura, pour une partie A de cet espace :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \text{ et } l \text{ intérieur à A} \Rightarrow \exists N, \forall n \geq N, a_n \in A$$

Quelle définition donner d'un point intérieur à une partie pour que cette propriété soit vraie ? On remarque que, s'il existe une boule $B(l,R)$ avec $R > 0$ incluse dans A, alors on aura :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

$\Rightarrow \quad \exists N, \forall n \geq N, \| a_n - l \| < R$

$\Rightarrow \quad \exists N, \forall n \geq N, a_n \in B(l,R)$

$\Rightarrow \quad \exists N, \forall n \geq N, a_n \in A$

et la conclusion sera vraie.

On posera donc la définition suivante :

DEFINITION

Un élément x de A *est dit intérieur à* A *s'il existe une boule* B(*x*,R) *de rayon strictement positif incluse dans* A. *On a alors* :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = x \text{ et } l \text{ intérieur à } A \Rightarrow \exists N, \forall n \geq N, a_n \in A$$

On appelle intérieur de A *noté* $\overset{\circ}{A}$ *l'ensemble des points intérieurs à* A.

Si, pour tout point x d'une partie U, *il existe une boule centrée en x incluse dans* U, *alors on dira que* U *est un ensemble ouvert.* U *est égal à son intérieur. On a alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = x \text{ et } x \in U \text{ ouvert} \Rightarrow \exists N, \forall n \geq N, a_n \in U$$

Intuitivement, lorsqu'on est à l'intérieur d'une partie, on peut se déplacer en restant dans cette partie, à condition que son déplacement soit de faible amplitude.

EXEMPLES :

❑ Voici quelques exemples d'ouverts dans $\mathbb{R}$: Les intervalles ouverts, bornés ou non, $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^*$ ...

❑ Voici des exemples de parties non ouvertes : $\mathbb{Q}$, $\complement\mathbb{Q}$, qui sont d'intérieur vide puisqu'il n'existe aucun intervalle inclus dans ces ensembles, les intervalles fermés qui possèdent comme intérieur l'intervalle ouvert obtenu en enlevant les bornes de l'intervalle fermé ...

❑ Voici des exemples d'ouverts du plan : $\{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$, B(O,R)...

❑ Voici des exemple de parties non ouvertes du plan : $\{(x,y) \mid x \geq 0, y > 0\}$ dont l'intérieur est $\{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$, $\mathbb{Z}^2$ qui est d'intérieur vide.

PROPRIETES DES OUVERTS :

i) *E et ∅ sont ouverts*

ii) *Une réunion quelconque d'ouvert est un ouvert.*

iii) *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

iv) *Une boule ouverte est un ouvert.*

Démonstration :

i) évident pour E. En ce qui concerne ∅, il est impossible de trouver un élément x qui contredise la propriété d'être intérieur à ∅, donc ∅ est ouvert !

ii) Soit $\bigcup_{i\in I} O_i$ une réunion d'ouverts et x un élément quelconque de cette réunion. Il existe i tel que x soit élément de O_i, et O_i contient une boule centrée en x. Il en est donc de même de la réunion.

iii) Soit $\bigcap_{i\in I} O_i$ une intersection d'ouverts et x élément quelconque de cette intersection. Pour chaque i, il existe R_i tel que $B(x,R_i) \subset O_i$. Les R_i, **étant en nombre fini**, possèdent un minimum R. On a alors $B(x,R) \subset O_i$ pour tout i, soit $B(x,R) \subset \bigcap_{i\in I} O_i$. Ce résultat est faux pour une intersection quelconque. Par exemple $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est ouvert pour tout n entier, mais $\bigcap_{n\in \mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ n'est pas ouvert.

iv) Soit $B = B(x_0,R)$ une boule ouverte, et soit $x \in B$. Alors $d(x,x_0) < R$. Posons $R' = R - d(x_0,x)$. Au moyen de l'inégalité triangulaire, il n'est pas difficile de montrer que $B(x,R')$ est incluse dans B.

$$y \in B(x,R') \Leftrightarrow d(y,x) < R' \Rightarrow d(y,x_0) \leq d(y,x) + d(x, x_0) < R' + d(x,x_0) = R$$

3– Points adhérents à une partie, fermés

Dans $\mathbb{R}$, on a des résultats tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \text{ et } \forall\, n,\ a_n \geq \alpha \Rightarrow l \geq \alpha \text{ (passage à la limité dans une inégalité large)}$$

On note que la conclusion se fait avec une inégalité large, même si l'hypothèse comporte une inégalité stricte :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \text{ et } \forall\, n,\ a_n > \alpha \Rightarrow l \geq \alpha$$

On dira que l est adhérent à l'ensemble $]\alpha, +\infty[$ (soit l appartient à cette ensemble, soit il en constitue une borne). Dans un espace normé, on aura :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \text{ et } \forall\, n,\ a_n \in A \Rightarrow l \text{ est adhérent à A.}$$

Quelle définition donner d'un point adhérent à une partie pour que cette propriété soit vraie ? La solution de facilité consiste à prendre cette implication comme définition : l est adhérent à A si l est la limite d'une suite de A. Mais cherchons une autre caractérisation. On remarque que, puisque a_n tend vers l et que a_n est élément de A, il existe des éléments de A aussi proche que l'on veut de l, ce qu'on peut traduire par :

$\forall\, R > 0, \exists\, a \in A, d(l, a) < R$

ou $\forall\, R > 0, \exists\, a \in A, a \in B(l, R)$

ou $\forall\, R > 0, A \cap B(l, R) \neq \varnothing$

Vérifions qu'inversement, un point x vérifiant :

$$\forall\, R > 0, A \cap B(x, R) \neq \varnothing$$

est limite d'une suite de A. Il suffit pour cela de prendre $R = 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...$ Pour chaque entier n, on a donc $B(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \varnothing$. Cela signifie qu'il existe a_n dans $B(x,\frac{1}{n}) \cap A$. On a alors construit une suite de A convergeant vers x. D'où :

PROPOSITION-DEFINITION

Soit A *une partie de E et x un point de E. Il y a équivalence entre :*

i) $\forall$ R > 0, B(x,R) $\cap$ A $\neq \varnothing$

ii) *il existe une suite* (a_n) *d'éléments de* A *telle que* $\lim_{n \to +\infty} a_n = x$ *(caractérisation séquentielle des points adhérents).*

On dit alors que x est adhérent à A. *On appelle adhérence de* A, *notée* $\overline{\text{A}}$, *l'ensemble des points adhérents à* A.

EXEMPLE :

❑ A =]0,1[et $x = 0$. $x = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}$. L'adhérence de A est égale à [0, 1].

❑ L'adhérence de $\{(x,y) \mid x \geq 0, y > 0\}$ est égale à $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$, $\mathbb{Z}^2$ qui est d'intérieur vide.

Revenons à l'énoncé dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \text{ et } \forall\, n,\, a_n \geq \alpha \Rightarrow l \geq \alpha$$

Dans un espace normé, on souhaiterait caractériser les parties F telles que :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \text{ et } \forall\, n,\, a_n \in \text{F} \Rightarrow l \in \text{F}$$

On sait que l'on a $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ et $\forall\, n$, $a_n \in$ F $\Rightarrow l$ adhérent à F. Pour conclure que $l \in$ F, il suffit d'exiger que tout point adhérent appartienne à F. On dira alors que F est fermé, de sorte que :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \text{ et } \forall\, n,\, a_n \in \text{F fermé} \Rightarrow l \in \text{F}$$

Mais là aussi, l'implication a servi de définition. Que peut-on dire de plus sur F ? On remarque que, dans $\mathbb{R}$, [α, +∞[qui est fermé, est le complémentaire de]–∞, α[qui est ouvert. Montrons alors :

PROPOSITION-DEFINITION

Soit F *une partie de* E. *Il y a équivalence entre :*

i) *Tout point adhérent à* F *appartient à* F. *Autrement dit, toute suite convergente de* F *a sa limite dans* F *(caractérisation séquentielle des fermés) ou encore F est égale à son adhérence.*

ii) F *est le complémentaire d'un ouvert*

On dira alors que F *est fermé, et l'on a :*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \textit{ et } \forall\, n,\, a_n \in \text{F } \textit{fermé} \Rightarrow l \in \text{F}$$

<u>Démonstration</u> :

i) $\Rightarrow$ ii) Supposons que tout point adhérent à F appartient à F. Soit x élément de $\complement$F. Alors x n'appartient pas à F, donc x n'est pas adhérent à F, donc :

$$\exists\, \text{R} > 0,\, \text{B}(x,\text{R}) \cap \text{F} = \varnothing$$

ce qui signifie que B(x,R) $\subset \complement$F. Donc x est intérieur à $\complement$F. x étant quelconque, cela montre que $\complement$F est ouvert.

ii) $\Rightarrow$ i) Supposons que U = $\complement$F soit ouvert, et soit x adhérent à F. Alors, pour tout R > 0, B(x,R) $\cap$ F $\neq \varnothing$ de sorte que B(x,R) n'est jamais inclus dans U, et donc que x n'appartient pas à U. (U étant ouvert, si x était élément de U, il y aurait une boule de centre x incluse dans U). Puisque x n'appartient pas à U, alors x appartient à F.

EXEMPLES

❑ Voici des exemples de fermés dans $\mathbb{R}$: les intervalles fermés, $\mathbb{Z}$...

❑ Voici des exemples de parties qui ne sont pas fermées dans $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$, $\complement\mathbb{Q}$ dont l'adhérence est égale à $\mathbb{R}$, les intervalles ouverts dont l'adhérence est l'intervalle fermé obtenu en rajoutant les bornes réelles de l'intervalle ouvert.

❑ Voici des exemples de fermés dans $\mathbb{R}^2$: une parabole, un cercle, $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$...

❑ Voici des exemples de parties qui ne sont pas fermées dans $\mathbb{R}^2$: $\{(x,y) \mid x \geq 0, y > 0\}$ dont l'adhérence est $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$, $\mathbb{Q}^2$ dont l'adhérence est $\mathbb{R}^2$.

PROPRIETES DES FERMES :

i) $\emptyset$ *et E sont des fermés.*
ii) *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*
iii) *Une réunion finie de fermés est un fermé.*
iv) *Une boule fermée est un fermé.*

Démonstration :
Les propriétés i), ii), iii) résultent des propriétés des ouverts par passage au complémentaire. POur la propriété iv), montrons que le complémentaire d'une boule fermée $B(a, R)$ est un ouvert. Soit x élément de ce complémentaire. On a donc $\| x - a \| > R$. Prenons $R' < \| x - a \| - R$ et montrons que $B(x, R') \subset \complement B(a, R)$.

$$\forall y, y \in B(x, R') \Rightarrow \| y - x \| \leq R'$$
$$\Rightarrow \| y - a \| = \| (y - x) - (x - a) \| \geq \| x - a \| - \| y - x \| \geq \| x - a \| - R' > R$$

donc $\quad y \in \complement B(a, R)$

DEFINITION
Soit A *une partie d'un espace vectoriel normé* E. *On appelle frontière de* A, *notée* Fr(A), *est l'ensemble des points qui sont adhérents à la fois à* A *et à* $\complement$A.

EXEMPLES :
❑ La frontière de $[a, b[$ est $\{a, b\}$
❑ La frontière de $\{(x,y) \mid x \geq 0, y > 0\}$ est la réunion des deux demi-droites $[0, +\infty[\times \{0\}$ et $\{0\} \times [0, +\infty[$
❑ La frontière de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$.

III : Fonctions définies sur un espace normé

1- Limites

❑ Soit f une application d'un espace normé E dans un espace normé F, E et F possédant le même corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (f n'est pas forcément linéaire). Soit A inclus dans E et a un point adhérent à A. On dit que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x \in A \text{ et } \| x - a \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - b \| < \varepsilon$$

On montrera en exercice que b est unique (démonstration analogue à celle des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Si F est un espace de dimension finie, on peut choisir une base $(e_1, ..., e_n)$ et poser :

$$\forall y \in F, y = y_1 e_1 + .. + y_n e_n$$

$$\text{et } f(x) = f_1(x)\, e_1 + \dots + f_n(x)\, e_n$$

où les y_i sont des scalaires et les f_i des fonctions de E dans le corps de base $\mathbb{K}$. On peut prendre dans F la norme N_1 définie par $N_1(y) = |y_1| + \dots + |y_n|$. Comme pour les suites, on a $\lim_{x\to a} f(x) = b$ si et seulement si, pour tout i, $\lim_{x\to a} f_i(x) = b_i$.

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans F, on définit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon, \exists\, A, \forall\, x > A, \| f(x) - b \| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon, \exists\, A, \forall\, x < A, \| f(x) - b \| < \varepsilon$$

Si f est une fonction de E dans $\mathbb{R}$, on définit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, A, \exists\, \delta, \forall\, x \in B(a,\delta), f(x) > A$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, A, \exists\, \delta, \forall\, x \in B(a,\delta), f(x) < A$$

❑ Comme pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a, pour f et g fonctions de E dans F et λ fonction de E dans $\mathbb{K}$ corps de base ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = c \Rightarrow \lim_{x\to a} (f + g)(x) = b + c$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x\to a} \lambda(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to a} (\lambda f)(x) = lb$$

Pour f de E dans F et g de F dans G :

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{y\to b} g(y) = c \Rightarrow \lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$$

Les démonstrations sont identiques à celles concernant les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en changeant valeur absolue par norme.

Pour f de E dans F, on a :

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \text{pour toute suite } (u_n) \text{ de limite } a, f(u_n) \text{ a pour limite } b$$

Le sens $\Rightarrow$ découle de la composée des limites des deux fonctions $n \to u_n$ et de $x \to f(x)$. En ce qui concerne la réciproque, si $f(x)$ ne convergeait pas vers b, cela signifierait que :

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, \delta > 0, \exists\, x, \| x - a \| < \delta \text{ et } \| f(x) - b \| \geq \varepsilon$$

En prenant $\delta = \dfrac{1}{n}$ et en appelant u_n l'élément tel que $\| u_n - a \| < \dfrac{1}{n}$ et $\| f(u_n) - b \| \geq \varepsilon$, on définit ainsi une suite (u_n) de limite a, pour laquelle $(f(u_n))$ ne tend pas vers b, contrairement à l'hypothèse.

❑ f est continue en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Si f n'est pas définie en a, mais si $\lim_{x\to a} f(x) = b$, on peut prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = b$.

❑ S'il existe une fonction φ de E dans $\mathbb{R}$ et une constante C telle que, au voisinage de a, $\| f(x) \| \leq C\, \varphi(x)$, on dit que f est dominée par φ au voisinage de a, et on note $f = O(\varphi)$. Si $\dfrac{\| f \|}{\varphi}$ tend vers 0 quand x tend vers a, on dit que f est négligeable devant φ et on note $f = o(\varphi)$.

2- Continuité

f définie de A, inclus dans E, à valeurs dans F est dite continue sur A si f est continue en tout point de A. On note C(A,F) l'espace vectoriel des applications continues de A dans F. La somme de deux fonctions continues à valeurs dans F, le produit d'une fonction continue à valeur dans F par une fonction continue à valeur dans $\mathbb{K}$, la composée de deux fonctions continues, sont continues. Si F est de dimension finie, il y a équivalence entre la continuité de f et la continuité de chacune de ses composantes f_i.

EXEMPLE :
Un polynôme de plusieurs variables $x_1, ..., x_n$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$. Il s'agit d'une fonction continue.

PROPOSITION
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ *continue, et a un réel. Alors* $\{x, f(x) \geq a\}$ et $\{x, f(x) \leq a\}$ *sont fermés.* $\{x, f(x) > a\}$ *et* $\{x, f(x) < a\}$ *sont ouverts*

Démonstration :
Soit (x_n) une suite convergeant vers x tel que, pour tout n, $f(x_n) \geq a$. Alors, en passant à la limite, $f(x) \geq a$. On a montré que $\{x, f(x) \geq a\}$ est fermé. On procède de même pour $\{x, f(x) \leq a\}$. Quant à $\{x, f(x) > a\}$ et $\{x, f(x) < a\}$, ce sont les complémentaires des exemples précédents, donc il sont ouverts.

Cette proposition permet de montrer que tel ou tel ensemble est ouvert ou fermé, comme dans les exemples suivants :
EXEMPLES :
❑ $\{(x, y) \mid y^2 \geq x^2 + 3\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Il suffit en effet de définir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = y^2 - x^2$ pour s'apercevoir qu'on demande de chercher $\{(x, y), f(x, y) \geq 3\}$

❑ $\{(x,y) \mid y^2 > x^2 + 3\}$ est ouvert.

❑ $\{(x,y,z) \mid xy \leq z$ et $z \leq 1 - x^2 - y^2\}$ est fermé, comme intersection du fermé $F = \{(x,y,z) \mid xy \leq z\}$ et du fermé $G = \{(x,y,z) \mid z \leq 1 - x^2 - y^2\}$.

❑ $\{(x,y,z) \mid xy \leq z$ ou $z \leq 1 - x^2 - y^2\}$ est fermé, comme réunion du fermé $F = \{(x,y,z) \mid xy \leq z\}$ et du fermé $G = \{(x,y,z) \mid z \leq 1 - x^2 - y^2\}$.

❑ Une boule fermée est fermée. En effet $B(a, R) = \{x, \| x - a \| \leq R\} = \{x, f(x) \leq R)$ avec f la fonction continue $x \to \| x - a \|$.

On admettra également le théorème suivant, qui généralise le fait que l'image d'un segment par une fonction continue à valeurs réelles est un segment. On essaie ainsi de généraliser la notion de segment aux espaces normés :
THEOREME
Soient E *et* F *étant deux espaces normés de* ***dimension finie****. Alors l'image d'une partie fermée bornée de* E *par une application continue à valeurs dans* F *est fermée bornée. En particulier, si* F *est égal à* $\mathbb{R}$*, elle admet un maximum et un minimum.*

La première partie du théorème est admise. En ce qui concerne le cas F = $\mathbb{R}$, si A est un fermé bornée, alors f(A) est fermé borné. La borne supérieur de f(A) est donc en fait un maximum. On raisonne de même pour le minimum.

Ce résultat peut être faux pour des espaces vectoriels normés de dimension infinie.

3- Fonctions lipschitziennes

Pour qu'une fonction f soit continue, et donc vérifie :

$$\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, \| x - y \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$$

il suffit que l'on ait :

$$\forall x, \forall y, \| f(x) - f(y) \| \leq k \| x - y \|$$

En effet, dans ce cas, il suffit de prendre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ pour que la définition de la continuité soit vérifiée. On dit que f est lipschitzienne de rapport k. On peut noter que, si f et g sont lipschitziennes, il en est de même de la somme, du produit par un scalaire et de la composée.

EXEMPLES :

❑ Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables à dérivées bornées sont lipschitziennes. Si M majore $|f\,'|$, on a, en vertu de l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, \forall y, |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$$

❑ La fonction de E dans $\mathbb{R}$, qui à x associe $\| x \|$ est lipschitzienne de rapport 1. En effet :

$$\forall x, \forall y, \big|\| x \| - \| y \|\big| \leq \| x - y \|$$

❑ La fonction x^2 est continue mais n'est pas lipschizienne.

4- Cas des applications linéaires

Nous avons vu que f lipschitzienne $\Rightarrow$ f continue et que la réciproque est fausse. Cependant, si f est liénaire, les deux notions sont identiques.

PROPOSITION :

Soit u une application linéaire d'un espace normé (E,N) *dans un espace normé* (F,N'). *Il y a équivalence entre :*

i) *il existe k tel que* : $\forall x \in$ E, N'($u(x)$) $\leq k$ N(x)

ii) *u est lipschitzienne*

iii) *u est continue sur* E

iv) *u est continue en* 0

Dans le cas où E *est de dimension finie, ces relations sont vérifiées*

<u>Démonstration</u> :

❑ i) $\Rightarrow$ ii) car N'($u(x) - u(y)$) = N'($u(x - y)$) $\leq k$ N($x - y$)

❑ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) est évident

❑ Supposons iv) et montrons i). La continuité en 0 implique que (pour $\varepsilon = 1$) :

$$\exists \delta > 0, \forall x, \text{N}(x) < \delta \Rightarrow \text{N}'(u(x)) < 1$$

Soit x quelconque. Alors $\dfrac{\delta}{2\mathrm{N}(x)}\, x$ est de norme inférieure à δ, donc :

$$\mathrm{N}'\left(\frac{\delta}{2\mathrm{N}(x)}\, u(x)\right) < 1$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{N}'(u(x)) < \frac{2}{\delta}\,\mathrm{N}(x) \text{ et i) est vérifié avec } k = \frac{2}{\delta}$$

Dans le cas où E est de dimension finie, on peut choisir une base $(e_1 , e_2, ..., e_n)$ de E. On a alors :

$$\mathrm{N}'(u(x)) = \mathrm{N}'(u(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\,)) = \mathrm{N}'(\sum_{i=1}^{n} x_i\, u(e_i)) \le \sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right|\, \mathrm{N}'(u(e_i))$$

$$\le \mathrm{N}_1(x) \ \underset{i=1..n}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{N}'(u(e_i)) \le k\, \mathrm{N}(x)$$

en utilisant le fait que les normes sont équivalentes en dimension finie.

❑ La continuité de u n'est pas nécessairement vérifiée si E est de dimension infinie. Considérons par exemple $\mathrm{E} = \mathrm{C}^0([0,1])$ muni de la norme $\mathrm{N}_1(f) = \displaystyle\int_0^1 \left|f(t)\right|\, \mathrm{d}t$ et $u : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par $u(f) = f(0)$.

Considérons la suite (f_n) de E où f_n est la fonction telle que :

$$f_n(0) = 1 - nx \text{ sur } [0,\frac{1}{n}]$$

$$f_n(\frac{1}{n}) = 0 \text{ sur } [\frac{1}{n},1]$$

On a $u(f_n) = 1$ alors que $\mathrm{N}_1(f_n) = \dfrac{1}{2n}$ donc (f_n) tend vers 0 alors que ce n'est pas le cas de $u(f_n)$ qui est constante. Donc u n'est pas continue.

Ce que nous venons de dire s'applique également aux applications bilinéaires. Soit $\mathrm{B} : \mathrm{E} \times \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ bilinéaire, qui à (x,y) associe $\mathrm{B}(x,y)$. Si E et F sont de dimension finie, alors il existe une constante k telle que :

$$\forall\ (x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F},\ \| \mathrm{B}(x,y) \| \le k\, \| x \|\, \| y \|$$

La relation ainsi obtenue est une généralisation de l'inégalité de Schwarz pour le produit scalaire. La démonstration est comparable au cas linéaire. Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ une base de F, alors :

$$\| \mathrm{B}(x,y) \| = \| \mathrm{B}(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\, ,\sum_{j=1}^{p} y_j\, e_j) \| = \| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i\, y_j\, \mathrm{B}(e_i, e_j) \|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \left|x_i\right| \left|y_j\right|\, \|\ \mathrm{B}(e_i, e_j) \|$$

$$\le \mathrm{N}_1(x)\, \mathrm{N}_1(y)\, \underset{i,j}{\mathrm{Max}}\ \|\ \mathrm{B}(e_i, e_j) \| \le k\, \mathrm{N}(x)\, \mathrm{N}(y)$$

Il en résulte que B est continue. En effet :

$$\begin{aligned}
\| \mathrm{B}(x,y) - \mathrm{B}(x_0,y_0) \| &= \| \mathrm{B}(x,y) - \mathrm{B}(x,y_0) + \mathrm{B}(x,y_0) - \mathrm{B}(x_0,y_0) \| \\
&\le \| \mathrm{B}(x,y) - \mathrm{B}(x,y_0) \| + \| \mathrm{B}(x,y_0) - \mathrm{B}(x_0,y_0) \| \\
&\le \| \mathrm{B}(x,y - y_0) \| + \| \mathrm{B}(x - x_0,y_0) \| \\
&\le k\, \| x \|\, \| y - y_0 \| \ + k\, \| x - x_0 \|\, \| y_0 \|
\end{aligned}$$

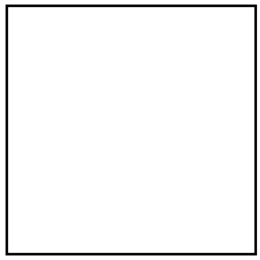
quantité qui tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0)

EXEMPLE :
La même propriété s'applique pour les applications multilinéaires. En particulier, le déterminant est continu.

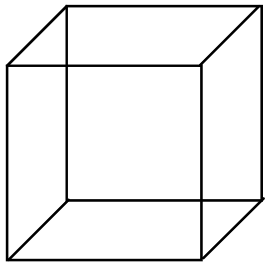
Annexe I : boules en dimension 4

- Les boules pour la norme N_∞ ont la forme suivante :

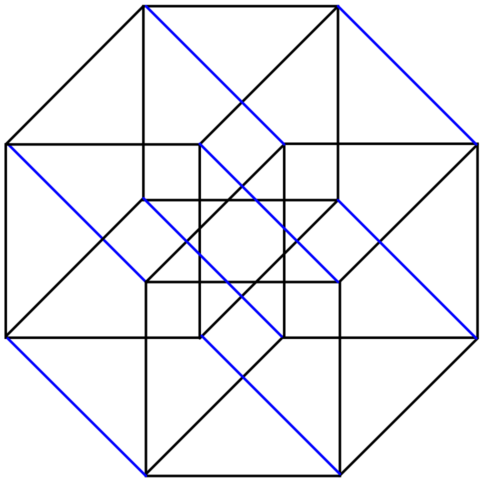
en dimension 2 :



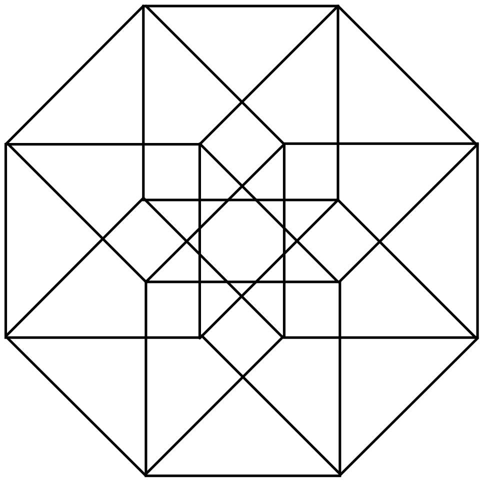
en dimension 3 :



en dimension 4, on obtient un hypercube, obtenu en translatant le cube dans une quatrième dimension :



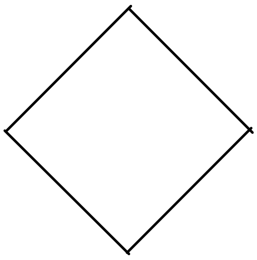
Mais les quatre dimensions jouent des rôles symétriques et il vaut mieux avoir une vision ne privilégiant pas de direction particulière :



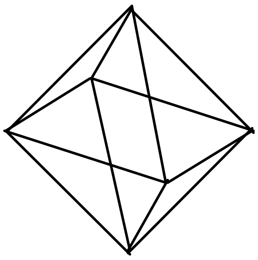
La figure ci-dessus possède 16 sommets, 32 arêtes, 24 faces carrées, 8 cubes.

- Les boules pour la norme N_1 ont la forme suivante :

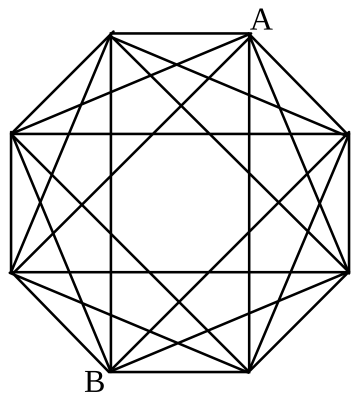
en dimension 2 :



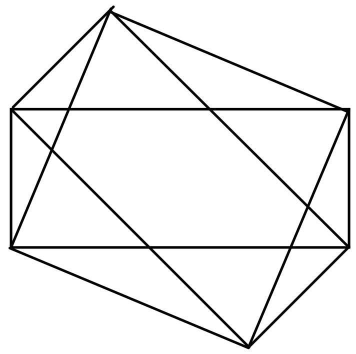
en dimension 3 :



Il s'agit d'un octaèdre (dual du cube, il est obtenu à partir du cube en joignant les centres des faces adjacentes). On l'obtient aussi à partir de la boule de dimension précédente en placant nouveaux deux points symétriquement par rapport au centre et en joignant ces deux points aux sommets précédemments existants.
On peut généraliser ces remarques en dimension 4, ou bien en prenant le dual de l'hypercube (en joignant les centres des cubes adjacents) ou bien en rajoutant deux points dans une quatrième dimension que l'on joint aux sommets de l'octaèdre. On obtient ainsi un hyper-octaèdre, polytope régulier convexe de dimension 4. (Il existe 5 polyèdres réguliers convexes en dimension 3, 6 en dimension 4 et 3 seulement en dimension supérieure).



Si on supprime par exemple les points A et B ainsi que leurs segments, on obtient :



qui est bien un octaèdre.
L'hyperoctaèdre possède 8 sommets, 24 arêtes, 32 faces triangulaires et 16 tétraèdres.

Annexe II : le théorème de d'Alembert

Ce théorème énonce que tout polynôme P à coefficients complexes non constant admet au moins une racine complexe. Il est admis en première année de CPGE, mais nous avons maintenant les moyens de le démontrer. Soit $P = a_0 + a_1X + ... + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ avec $n \geq 1$. Quand z tend vers l'infini, $\lim\limits_{z \to \infty} |P(z)| = +\infty$. Cela signifie que :

$$\forall A, \exists R, \forall z, |z| > R \Rightarrow |P(z)| > A.$$

Si on prend par exemple $A = |P(0)|$, alors $|P(z)| > |P(0)|$ pour z en dehors du disque fermé de rayon R. Ce disque D étant fermé borné et $|P|$ étant continue sur ce fermé borné y admet un minimum m atteint en un point z_0. On a évidemment $m \leq |P(0)|$ puisque 0 appartient à D. Et a fortiori pour z à l'extérieur du disque, on a $|P(z)| > |P(0)| \geq m$, donc ce minimum m est le minimum de $|P(z)|$ pour tous les z du plan complexe.

Si $m = 0$, z_0 est une racine du polynôme P.

Nous allons montrer que $m > 0$ est impossible. Si tel était le cas, nous allons montrer que m ne peut être le minimum de $|P|$. Considérons pour cela le développement de P dans la base $(X - z_0)^k$,

$0 \le k \le n$. Notons k le degré du terme de plus bas degré non nul en dehors du terme constant, de sorte que P(X) peut s'écrire :

$$P(X) = P(z_0) + \alpha_k(X - z_0)^k + \text{termes en } (X - z_0)^{k+1}, ..., (X - z_0)^n \qquad \text{avec } \alpha_k \ne 0$$

Posons $X = z_0 + r\omega$ avec r réel positif, ω racine $k^{\text{ème}}$ de $-\dfrac{P(z_0)}{\alpha_k}$. On obtient alors :

$$P(z_0 + re^{i\theta}\omega) = P(z_0) - P(z_0)r^k + \text{termes en } r^{k+1}, ..., r^n$$
$$= P(z_0)(1 - r^k + r^{k+1}g(r)) \text{ pour une certaine fonction } g \text{ polynomiale en } r$$

$$\Rightarrow \qquad |P(z_0 + re^{i\theta}\omega)| = |P(z_0)(1 - r^k + r^{k+1}g(r))|$$
$$\le |P(z_0)|\,(|1 - r^k| + r^{k+1}|g(r)|)$$

Prenons $0 \le r < 1$ de sorte que :

$$|P(z_0 + re^{i\theta}\omega)| \le |P(z_0)|\,(1 - r^k + r^{k+1}|g(r)|) = m(1 - r^k(1 - r|g(r)|))$$

On prend r suffisamment petit de façon que $1 - r|g(r)| > 0$ (ce qui est possible puisque $1 - r|g(r)|$ tend vers 1 quand r tend vers 0). Pour de tels r, on a :

$$|P(z_0 + re^{i\theta}\omega)| < m \text{ contredisant la minimalité de } m.$$

*Annexe III : Complément de cours MP/MP**

1- Théorème de Bolzano-Weierstrass et compacts

Le théorème de Bolzano-Weierstrass, vue en MPSI, énonce que, de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite qui converge. Ce théorème reste vrai dans un espace normé **de dimension finie** de la façon suivante : soit (u_n) une suite bornée de E. Alors, il existe une sous-suite de (u_n) qui converge. En effet, une base étant choisie et la suite étant bornée, il en est de même de chaque suite de composantes $(u_n(i))$. Il existe donc une sous-suite (u_{n_k}) telle que la sous-suite des premières composantes converge, puis une sous-suite de la précédente (u_{p_k}) telle que la sous-suite des deuxièmes composantes converge (et celle des premières composantes qui convergeait déjà continue à le faire), puis une sous-suite (u_{r_k}) de la précédente telle que la sous-suite des troisièmes composantes converge, etc... A chaque sous-suite, on obtient une composante de plus qui converge.

Dans un espace de dimension infinie, le théorème de Bolzano-Weierstrass peut être faux. Considérons par exemple $E = \mathbb{K}[X]$ muni de la norme N_∞ (maximum des coefficients du polynôme dans la base canonique) et soit $U_n = X^n$. Il n'existe aucune sous-suite de (U_n) qui converge vers quoi que ce soit. En effet, si (U_{n_k}) converge vers le polynôme $L = \sum l_n X^n$ pour la norme N_∞, on a, pour tout i, en notant $U_n(i)$ le coefficient de degré i du polynôme U_n :

$$|U_{n_k}(i) - l_i| \le N_\infty(U_{n_k} - L)$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n_k}(i) = l_i$. Or $U_{n_k}(i) = 0$ dès que $n_k > i$, donc nécessairement $l_i = 0$ et L est le polynôme nul. Mais aucune sous-suite (U_{n_k}) ne tend vers le polynôme nul, puisque $N_\infty(U_{n_k}) = 1$. donc le théorème de Bolzano-Weierstrass ne s'applique pas.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass est liée à la notion de compact :

PROPOSITION-DEFINITION

Soit K *une partie d'un espace normé. Considérons les deux propriétés :*

i) K *est une partie fermée bornée*

ii) *De toute suite de* K*, on peut extraire une sous-suite convergente dans* K*. On appelle compact d'un espace normé* E *une partie* K *de* E *vérifiant cette propriété* ii)
Alors :

Quelle que soit la dimension de E*,* ii) $\Rightarrow$ i)
En dimension finie, ii) $\Leftrightarrow$ i)

Démonstration :
❑ ii) $\Rightarrow$ i)
Si de toute suite d'une partie K, on peut extraire une sous-suite convergente dans K, alors K est fermée et bornée.

K est fermée, car si l est un point adhérent de K, il existe une suite de K convergeant vers l. Cette suite admet une sous-suite convergente dans K, mais cette sous-suite converge elle-même vers l, donc l est dans K.

K est bornée car sinon, on pourrait trouver x_1 élément de K tel que $\| x_1 \| > 1$, x_2 dans K tel que $\| x_2 \| > \| x_1 \| + 1$, ..., x_n dans K tel que $\| x_n \| > \| x_{n-1} \| + 1$, etc.... Le choix des x_i empêche toute sous-suite de converger puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \| x_n \| = +\infty$.

On notera que cette démonstration ne fait nullement appel à la dimension finie de l'espace.

❑ i) $\Rightarrow$ ii)
Si K est fermée bornée, alors une suite de K est bornée (puisque K l'est), donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass pour un espace de dimension finie, on peut extraire une sous-suite convergente, et puisque K est fermé, la limite de cette sous-suite est dans K.

La définition (ii) permet de montrer que l'image d'un compact par une application continue est un compact : Soit A un compact d'un espace vectoriel normé et f une application continue de cet espace vectoriel normé dans un autre. Il s'agit de montrer que f(A) est un compact. Soit (v_n) une suite de f(A). Il s'agit de montrer que cette suite admet une sous-suite convergente dans f(A). Or, pour tout n, il existe u_n élément de A tel que $f(u_n) = v_n$. A étant compact, il existe une sous-suite (u_{n_k}) qui converge vers l élément de A. f étant continue, la sous-suite $(v_{n_k}) = (f(u_{n_k}))$ converge vers $f(l)$ élément de f(A).

Les compacts disposent des propriétés suivantes :

PROPOSITION

i) *Un fermé inclus dans un compact est compact*
ii) *Le produit de deux compacts est un compact*

Démonstration
i) Soit F inclus dans K compact d'un espace vectoriel normé E. Alors F est compact. En effet, soit (u_n) une suite de F. (u_n) est également une suite de K, et K étant compact, on peut en extraire une sous-suite convergente vers l. Mais F étant fermé, la limite d'une suite convergente de F appartient à F. On a donc extrait une sous-suite de (u_n), convergeant vers un élément de F.

ii) Soient A et B deux compacts inclus respectivement dans deux espaces vectoriels normés E et F. Alors A $\times$ B est un compact de E $\times$ F. (Si E et F sont munis des normes N et N' respectivement, on munit E $\times$ F de la norme $\| (x, y) \| = N(x) + N'(y)$). En effet, si (u_n, v_n) est une suite de A $\times$ B, on extrait d'abord une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de la suite (u_n) de façon à ce qu'elle converge vers un élément de A, puis on extrait de la suite $(v_{\varphi(n)})$ une sous-suite $(v_{\psi(n)})$ qui converge vers un élément de B. Alors la sous-suite $(u_{\psi(n)}, v_{\psi(n)})$ converge vers un élément de A $\times$ B.

2- Applications uniformément continues

Entre les fonctions continues et les fonctions lipschitziennes se glisse une catégorie supplémentaire, les fonctions uniformément continues. On distingue donc :

❑ les fonctions continues :

$$\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, \| x - y \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$$

❑ les fonctions uniformément continues :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \forall y, \| x - y \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$$

Ce qui distingue la continuité de l'uniforme continuité, c'est que, dans le cas de la continuité, δ dépend de ε et x, alors que dans le cas de l'uniforme continuité, δ ne dépend que de ε et non de x.

❑ les fonctions lipschitziennes de rapport k :

$$\forall x, \forall y, \| f(x) - f(y) \| \leq k \| x - y \|$$

PROPOSITION

f lipschitzienne $\Rightarrow$ f uniformément continue $\Rightarrow$ f continue.

La deuxième implication est évidente. Pour la première, si f est k-lipschitzienne, prendre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$.

Toutes les réciproques sont fausses.

❑ $x \to e^x$ est continue mais pas uniformément continue. En effet, pour $x \geq y$, $e^x - e^y \geq (x - y)e^y$ donc, même si $|x - y| < \delta$, on pourra avoir $e^x - e^y$ arbitrairement grand.

❑ $x \to \sqrt{x}$ est uniformément continue sur [0, 1] mais pas lipschitizienne. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta = \varepsilon^2$. Soit x et y tels que $|x - y| < \delta$ avec par exemple $y \geq x$. On a alors :

$$x \leq y < y + \delta = y + \varepsilon^2$$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x} \leq \sqrt{y} < \sqrt{y + \varepsilon^2} < \sqrt{y} + \varepsilon$ comme on le voit en élevant au carré

$$\Rightarrow \quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| < \varepsilon$$

Elle n'est pas lipschitizienne car le rapport $\left|\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ n'est pas borné quand x et y tendent vers 0. Elle est uniformément continue en vertu du théorème suivant :

THEOREME (de HEINE)

Soit f : E $\to$ F, continue sur A compact de E. Alors f est uniformément continue.

<u>Démonstration 1</u> :

Si f n'est pas uniformément continue, alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in A, \exists y \in A, \| x - y \| < \delta \text{ et } \| f(x) - f(y) \| \geq \varepsilon$$

Prenons $\delta = \dfrac{1}{n}$ et appelons x_n et y_n les éléments x et y correspondants. A étant compact, il existe une sous–suite $(x_{\Phi(n)})$ qui converge vers une limite c. La sous-suite $(y_{\Phi(n)})$ converge nécessairement vers la même limite c, puisque $\| x_{\Phi(n)} - y_{\Phi(n)} \|$ tend vers 0. On en déduit que $(f(x_{\Phi(n)}))$ et $(f(y_{\Phi(n)}))$

convergent vers $f(c)$, et donc que $\| f(x_{\Phi(n)}) - f(y_{\Phi(n)} \|$ tend vers 0, ce qui contradictoire avec le fait que cette quantité reste supérieure à ε.

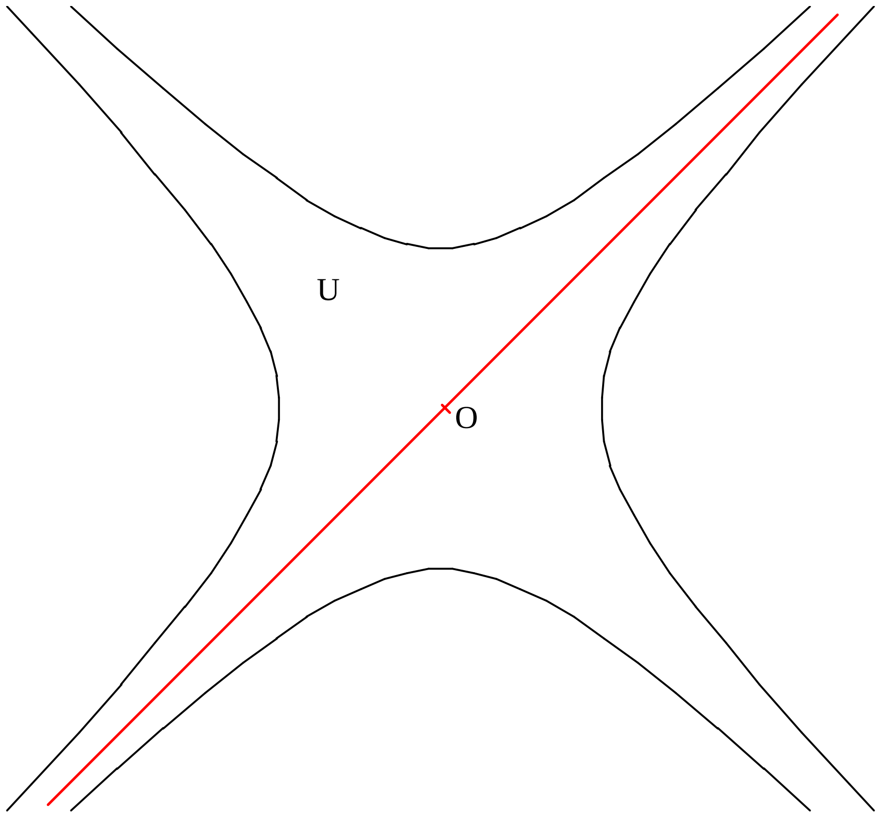
<u>Démonstration 2</u> :
Soit $\varepsilon > 0$ donné. Considérons la partie V de $E \times E$ définie par $\{(x, y) \mid \| f(x) - f(y) \| \geq \varepsilon\}$. On munit $E \times E$ de la norme $N(x,y) = \| x \| + \| y \|$, où $\| \ \|$ désigne ici la norme de E. Cette partie V est un fermé de $E \times E$ puisque, si (x_n, y_n) est une suite de V convergeant vers (x, y), alors :

$$\forall\, n, \| f_n(x) - f_n(y) \| \geq \varepsilon$$

donc en passant à la limite :

$$\| f(x) - f(y) \| \geq \varepsilon$$

donc (x, y) appartient à V.
Il en résulte que le complémentaire $U = \{(x, y) \mid \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon\}$ de V est ouvert. On note que U contient la diagonale $\{(x, x) \mid x \in E\}$. Voici ci-dessous, dans le cas de la fonction réelle $f(x) = x^2$, l'allure de U.



La diagonale est en rouge. U est limité par quatre hyperboles. Les sommets sont à la distance $\sqrt{\varepsilon}$ de l'origine.

Considérons l'application δ de E dans $\mathbb{R}^{+*}$, définie par : $x \to d((x, x), V) = \inf\limits_{(z,t) \in V} N((x, x) - (z, t))$, distance du couple (x, x) à V. Cette application δ est lipschitzienne de rapport 1. En effet, pour tout x et tout x', on a, (z, t) étant un élément de V :

$$\delta(x) = d((x, x), V) \leq N((x, x) - (z, t)) \leq N((x, x) - (x', x')) + N((x', x') - (z, t))$$

Prenant la borne inférieure du membre de droite lorsque (z, t) décrit V, on obtient :

$$\delta(x) \leq N((x, x) - (x', x')) + d((x', x'), V) = N((x, x) - (x', x')) + \delta(x')$$

$$\Rightarrow \quad \delta(x) - \delta(x') \leq N((x, x) - (x', x'))$$

On montrerait de même que $\delta(x') - \delta(x) \leq N((x, x) - (x', x'))$.

Par définition de δ et de N, on a :

$$\| y - x \| < \delta(x) \Rightarrow N((x, x) - (x, y)) < \delta(x) \Rightarrow (x, y) \in U \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$$

Ainsi, δ n'est autre que le δ intervenant dans la définition de la continuité de f, mais il apparaît ici non seulement comme une valeur dépendant de x (et de ε), mais comme une fonction continue de x.

Si on se limite à A compact, δ est une fonction continue sur un compact à valeurs strictement positives, donc admet un minimum strictement positif δ_0. On a alors :

$$\forall x, \forall y, \| x - y \| < \delta_0 \Rightarrow \| y - x \| < \delta(x) \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$$

et f est bien uniformément continue.

C'est le cas de la fonction $x \to x^2$, restreinte à un compact, comme le montre le graphique précédent : la fonction δ, distance des points de la diagonale à V, admet un minimum strictement positif. Par contre, si on se place sur $\mathbb{R}$ tout entier, les hyperboles limitant V sont asymptotes à la diagonale, et δ admet une borne inférieure nulle. Dans ce cas, f n'est pas uniformément continue.

Voici un exemple comparant continuité et uniforme continuité, et permettant de montrer l'intérêt de cette dernière notion.

3- Equivalence des normes

La convergence d'une suite, ainsi que les notions vues dans le II (boules, ouverts, fermés, points adhérents ou intérieurs à une partie, ...) sont définies à partir d'une norme pour un espace vectoriel normé. Or un espace vectoriel normé peut être muni de plusieurs normes. Il se pose alors la question de savoir si le fait de changer de norme changera la nature des objets ainsi définis. Une réponse négative est intéressante car cela signifie que la notion de limites de suites, d'ouverts, de fermés, de points adhérents, de points intérieurs, etc... est intrinsèque à l'espace et ne dépend pas de la norme choisie. Cela permet en particulier de choisir une norme la mieux adaptée aux calculs. C'est le cas en dimension finie et le résultat repose sur la notion de normes équivalentes.

Sur $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\mathrm{Max}(|x_i|) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n\ \mathrm{Max}(|x_i|)$$

donc $N_\infty \leq N_2 \leq N_1 \leq nN_\infty$. Il en résulte que, pour ces normes, si une suite converge pour une norme, elle converge pour les autres. Si E est un espace de dimension finie muni de deux normes N et N' alors il existe deux constantes C et C' telles que $N \leq CN'$ et $N' \leq CN$. Deux telles normes sont dites équivalentes. Nous avons montré à la fin du I que, pour toute norme N, il existe une constante C telle que $N \leq CN_1$ (où $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ dans une base $(e_1, ..., e_n)$ donnée, et la réciproque a été admise. On se propose de la démontrer ici.

<u>Démonstration 1</u> :

❑ Supposons que l'affirmation $\exists$ C', $N_1 \leq C'N$ soit fausse. Cela signifie alors que :

$$\forall C', \exists u \in E, N_1(u) > C'N(u)$$

En particulier, pour C' = n entier, il existe u_n tel que $N_1(u_n) > nN(u_n)$. En particulier $u_n \neq 0$. Quitte à diviser u_n par $N_1(u_n)$, on peut supposer que $N_1(u_n) = 1$ pour tout n et donc que $N(u_n) < \frac{1}{n}$. Puisque $N_1(u_n)$ est bornée, il en est de même des composantes des u_n dans la base $(e_1, ..., e_n)$, et en appliquant successivement le théorème de Bolzano-Weierstrass à chaque composante, on extrait une sous-suite (z_n) de la suite (u_n) convergeant vers une limite l pour N_1. Cependant, pour la norme N, la suite (z_n) est une sous-suite de (u_n) qui converge vers 0. Or ceci est impossible car :

$$\left|N_1(z_n) - N_1(l)\right| \leq N_1(z_n - l) \text{ tend vers 0 donc } N_1(l) = \lim_{n \to +\infty} N_1(z_n) = 1 \text{ donc } l \neq 0$$

$$N(z_n - l) \leq CN_1(z_n - l) \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} N(z_n - l) = 0$$

$$\left|N(z_n) - N(l)\right| \leq N(z_n - l) \text{ tend vers 0 donc } N(l) = \lim_{n \to +\infty} N(z_n) = 0 \text{ donc } l = 0$$

Démonstration 2 :

L'inégalité déjà prouvée suivante :

$$\forall x, N(x) = N(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right| N(e_i) \leq C \sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right| = CN_1(x) \text{ où } C = \text{Max } \{N(e_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

montre que l'application Id de (E,N_1) dans (E,N) est continue : Si (u_n) tend vers l pour N_1, autrement dit dans l'espace de départ, alors (u_n) tend vers l pour N, dans l'espace d'arrivée. Considérons la sphère S de rayon 1 dans (E,N_1). C'est un ensemble fermé et borné dans un espace de dimension finie. Elle est donc compacte. Son image S dans (E,N) par une application continue est donc également compacte. (On notera que la démonstration du fait que l'image continue d'un compact est un compact utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass, et que ce théorème est valide sur le fermé borné S de (E, N_1) en raisonnant composante par composante, sans utiliser d'équivalence de norme). L'application $S \subset (E, N) \to \mathbb{R}$ qui à x associe $N(x)$ est elle-même continue. Etant continue sur un compact, elle admet un minimum $\frac{1}{C'}$, non nul puisque x est non nul dans S. On a donc montré que :

$$N_1(x) = 1 \Rightarrow N(x) \geq \frac{1}{C'}$$

ou encore, en remplaçant x par $\frac{y}{N_1(y)}$ avec y quelconque :

$$\forall y \neq 0, N(\frac{y}{N_1(y)}) \geq \frac{1}{C'}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall y, C'N(y) \geq N_1(y)$$

Toutes les normes sont donc équivalentes à N_1 ; elles sont équivalentes entre elles.

◆