APPLICATIONS LINEAIRES

PLAN

I : Morphismes

1–Définition et exemples

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On appelle application linéaire ou morphisme d'espaces vectoriels une application f de E dans F telle que :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{E}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

En prenant $\lambda = 0$, on remarque que $f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$, ce qu'on peut aussi déduire du fait que f est un morphisme du groupe (E, +).

EXEMPLES :

❑ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to ax$

où a est un paramètre fixé est une application linéaire.

❑ Plus généralement, on peut considérer les applications de la forme :

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n \end{pmatrix}$$

ce qu'on note également :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matrice définissant l'application f

Cet exemple est caractéristique de toutes les applications linéaires en dimension finie.

❑ Soit E un espace vectoriel de base $(e_1, ..., e_n)$, alors une forme linéaire (application linéaire de E dans $\mathbb{K}$) s'écrit :

$$f(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1f(e_1) + ... + x_nf(e_n) \text{ de la forme } a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

❑ f: E $\to$ E définie par $f(x) = x$. Il s'agit de Id_E, l'application identique (ou identité) de E.

❑ Soit $\mathrm{I} : C^0([a, b]) \to \mathbb{R}$

$$f \quad \to \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{I}(f)$$

Alors I est linéaire.

❑ $C^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$

$$y \quad \to ay'' + by' + cy = \Phi(y)$$

Φ est linéaire.

❑ $\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergente}\} \to \mathbb{R}$

$$u \quad \to \lim_{n\to+\infty} u_n$$

❑ $\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ arithmétique}\} \to \mathbb{R}$

$$u \quad \to \mathrm{R}(u) = \text{la raison de la suite } u$$

On peut vérifier que $\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique$\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites. En effet, u arithmétique de raison $r \Rightarrow \lambda u$ est arithmétique de raison λr. u et v arithmétiques de raison r et $s \Rightarrow u + v$ arithmétique de raison $r + s$. Ces observations prouvent par ailleurs que R est linéaire.

❑ Soient $(e_1, ..., e_p)$ une base d'un espace vectoriel E, et $(f_1, ..., f_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel F. Alors il existe une et une seule application linéaire u de E dans F telle $u(e_i) = f_i$. Elle est définie par $u(\lambda_1e_1 + ... + \lambda_pe_p) = \lambda_1f_1 + ... + \lambda_pf_p$.

Si f est bijective, on parle d'*isomorphisme*.
Si E = F, on parle d'*endomorphisme*.
Si E = F et f bijective, on parle d'*automorphisme*.
Si F = $\mathbb{K}$, on parle de *forme linéaire*.

On note L(E,F) l'ensemble des applications linéaires de E dans F. On note L(E) l'ensemble des endomorphismes de E. On note E* l'ensemble des formes linéaires de E (on l'appelle dual de E). Il s'agit d'espaces vectoriels. L'élément nul est l'application identiquement nulle.

On peut composer les applications linéaires entre elles. Soit f élément de L(E,F) et g élément de L(F,G). On montrera aisément que $g \circ f$ est élément de L(E,G). En particulier, si E = F = G, il s'agit d'une loi interne. L'application $f \circ f$ est notée f^2, et de même, $f^n = f \circ ... \circ f$ n fois. On vérifiera également les règles :

$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$
$(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$
$(\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g) = \lambda(f \circ g)$
en précisant celles qui utilisent la linéarité des applications ou de certaines d'entre elles.

On prendra garde que $f \circ g = 0$ n'implique pas que $f = 0$ ou $g = 0$. On peut très bien avoir f et g non nulles alors que leur composée l'est. Considérer par exemple $p_F \circ p_G$ où p_F et p_G sont les projecteurs sur F (respectivement G) parallèlement à G (respectivement F), F et G étant deux supplémentaires.

On prendra garde également qu'en général $f \circ g \neq g \circ f$. Ainsi, la formule du binôme de Newton ne s'applique pas en général, mais seulement lorsque f et g commutent. Par exemple :

$$(f + g)^2 = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2$$

Considérons l'ensemble des automorphismes de E. Cet ensemble est non vide (il contient Id), stable par o. Tout élément admet un inverse qui est lui–même linéaire. En effet :

$$\begin{aligned} f^{-1}(y+y') &= f^{-1}(f(x) + f(x')) \text{ si } y = f(x) \text{ et } y' = f(x') \\ &= f^{-1}(f(x+x')) \text{ par linéarité de } f \\ &= x + x' \\ &= f^{-1}(y) + f^{-1}(y') \end{aligned}$$

On montre de même que $f^{-1}(\lambda y) = \lambda f^{-1}(y)$.
On note GL(E) l'ensemble des automorphismes de E, appelé groupe linéaire de E. Il s'agit d'un groupe avec la composée des applications.

2– Image

PROPOSITION

Soit f linéaire de E dans F. Alors f(E) est un sous–espace vectoriel de F. Ce sous-espace vectoriel s'appelle Image de f, noté Imf

<u>Démonstration</u> :
Montrons la stabilité de Im f par le produit externe, la stabilité par la somme se montrant de même.
Soit y élément de Imf, et λ un scalaire quelconque. Il existe x élément de E tel que :

$$\begin{aligned} & y = f(x) \\ \Rightarrow \quad & \lambda y = \lambda f(x) \\ \Rightarrow \quad & \lambda y = f(\lambda x) \end{aligned}$$

donc λy appartient à Imf.

Il est clair que f est surjective si et seulement si Imf = F.

3– Noyau

PROPOSITION

Soit f linéaire de E dans F. Alors $f^{-1}(\{0\})$ *est un sous–espace vectoriel de E. Ce sous-espace vectoriel s'appelle noyau de f, noté Kerf*

<u>Démonstration</u> :
Ker$f$ est non vide car $f(0_E) = 0_F$, de sorte que 0_E appartient à Ker$f$.
Ker$f$ est stable par la somme. En effet :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}f \text{ et } x' \in \mathrm{Ker}f &\Rightarrow f(x) = 0_F = f(x') \\ &\Rightarrow f(x) + f(x') = 0_F \\ &\Rightarrow f(x+x') = 0_F \end{aligned}$$

$\Rightarrow x+x' \in \mathrm{Ker}f$

On montre de même la stabilité par le produit externe.

L'intérêt du noyau résulte de la propriété suivante :

PROPOSITION

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}f = \{0_E\}$.

Démonstration :

f étant linéaire, f est un morphisme de groupe de (E,+) dans (F,+). La proposition se déduit donc directement de la même propriété pour les morphismes de groupes. Nous en donnons cependant une démonstration directe.

Supposons f injective. Et soit x élément de Ker$f$. Alors :

$$f(x) = 0_F = f(0_E) \Rightarrow x = 0_E$$

Donc $\mathrm{Ker}f = \{0_E\}$

Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}f = \{0_E\}$, et soit x et x' quelconques tels que $f(x) = f(x')$. Alors :

$$f(x) - f(x') = 0_F$$
$$\Rightarrow \quad f(x - x') = 0_F$$
$$\Rightarrow \quad x - x' \in \mathrm{Ker}f$$
$$\Rightarrow \quad x - x' = 0_E$$
$$\Rightarrow \quad x = x'$$

donc f est injective.

EXEMPLE 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+t \\ t+x \end{pmatrix}$$

Déterminer Ker$f$. f est–elle injective ?

Ker$f$ est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + t = 0 \\ t + x = 0 \end{cases}$, soit $x = -y = z = -t$. Il s'agit de la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. f n'est pas injective.

EXEMPLE 2 :

Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille de vecteurs de l'espace vectoriel E et f l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans E définie par :

$$f\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ ... \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p$$

Imf est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x_1, ..., x_p)$. f est surjective si et seulement si $(x_1, ..., x_p)$ est un système générateur de E.

Ker$f$ est l'ensemble des $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$ donnant une combinaison linéaire nulle de $(x_1, ..., x_p)$. f est injective si et seulement si $(x_1, ..., x_p)$ est un système libre.
f est bijective si et seulement si $(x_1, ..., x_p)$ est une base de E.

PROPOSITION
Soit f linéaire de E dans F et b élément de F. Alors l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = b$ *ou bien est vide ou bien est un sous-espace affine de direction le noyau de f.*

Démonstration :
Si l'ensemble des solutions est non vide, soit x_0 une solution particulière. L'énoncé affirme que l'ensemble des solutions est de la forme $x_0 + \mathrm{Ker}f = \{x_0 + z, z \in \mathrm{Ker}f\}$, ce qui est facile à vérifier. Cette propriété est couramment utilisée dans la résolution des équations différentielles linéaires de la forme $f(y) = c$, où f est une expression linéaire en y faisant intervenir y' et y'' (par exemple $y'' + 2y' + 3y$), et où la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre. Cette solution générale de l'équation sans second membre n'est autre que l'élément général du noyau de f.

Pour conclure, on peut montrer qu'un ensemble H est un espace vectoriel

- ❑ en utilisant la définition (mais pratiquement, celle-ci est réservée aux exemples fondamentaux, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$, et $\mathbb{R}^{\mathbf{R}}$.
- ❑ en montrant que H est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E (stabilité pour la somme et le produit)
- ❑ en montrant que H est un sous-espace vectoriel engendré par une partie M
- ❑ en montrant que H est l'image d'une application linéaire
- ❑ en montrant que H est le noyau d'une application linéaire.

Prenons par exemple pour H l'ensemble des suites arithmétiques. On peut montrer que H est un espace vectoriel :

- ❑ en montrant que H est stable pour la somme et le produit.
- ❑ en remarquant que H est engendré par la suite constante (1) et la suite $(n)_{n\in\mathbf{N}}$. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique, alors $\exists\, a$ et b tel que, $\forall\, n$, $u_n = a + bn$.
- ❑ en remarquant que H est l'image de $\mathbb{R}^2$ par l'application $(a, b) \to (a + bn)_{n\in\mathbf{N}}$.
- ❑ en remarquant que H est le noyau de l'application de $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$ définie par :

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \to (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

II : Cas de la dimension finie

1– Isomorphisme

Soit f une application injective et $(V_1, ..., V_n)$ un système libre de E. Alors le système $(f(V_1), ..., f(V_n))$ est libre dans F. En effet, considérons une combinaison linéaire nulle :

$\lambda_1 f(V_1) + ... + \lambda_n f(V_n) = 0$
$\Rightarrow\quad f(\lambda_1 V_1 + ... + \lambda_n V_n) = 0$
$\Rightarrow\quad \lambda_1 V_1 + ... + \lambda_n V_n = 0$ car f est injective
$\Rightarrow\quad \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$

Soit $(V_1, ..., V_n)$ un système générateur de E. Alors $(f(V_1), ..., f(V_n))$ est un système générateur de Imf. En effet :

$y \in \mathrm{Im}f$
$\Rightarrow \quad \exists\, x \in E, y = f(x)$
$\Rightarrow \quad \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n, x = \lambda_1 V_1 + ... + \lambda_n V_n$ et $y = f(x)$
$\Rightarrow \quad \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n, y = f(\lambda_1 V_1 + ... + \lambda_n V_n)$
$\Rightarrow \quad \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n, y = \lambda_1 f(V_1) + ... + \lambda_n f(V_n)$

En particulier, si f est surjective, $(f(V_1), ..., f(V_n))$ est un système générateur de F.

On en déduit que, si f est un isomorphisme et si $(V_1, ..., V_n)$ est une base de E, alors $(f(V_1), ..., f(V_n))$ est une base de F.

Réciproquement, si $(V_1, ..., V_n)$ est une base de E et $(f(V_1), ..., f(V_n))$ une base de F, alors f est un isomorphisme. En effet :

❑ f est injective :

Soit x élément de Ker$f$, de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i$. On a donc :

$f(x) = 0$

$\Rightarrow \quad f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i) = 0$

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(V_i) = 0$

$\Rightarrow \quad \forall\, i, \lambda_i = 0$ car les $f(V_i)$ forment un système libre.
$\Rightarrow \quad x = 0$

❑ f est surjective :

Soit y élément de F de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(V_i)$. Alors $y = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i)$.

On dit que deux sous–espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme du premier sur le second.

PROPOSITION

Deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Démonstration :

Ce qui précède prouve que deux espaces vectoriels isomorphes de dimension finie ont même dimension. Réciproquement, soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension, $(V_1, ..., V_n)$ une base de E, $(W_1, ...,W_n)$ une base de F. Définissons f par :

$$\forall\, i, f(V_i) = W_i.$$

Il est facile de montrer que, par combinaison linéaire, f s'étend de manière unique à E tout entier, et que f est un isomorphisme.

2– Supplémentaire

Tous les supplémentaires d'un sous–espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie ayant même dimension sont tous isomorphes entre eux. Si F admet pour supplémentaire G, on définit le projecteur sur F parallèlement à G par :

$$\begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x = \underset{\in F}{x_F} + \underset{\in G}{x_G} & \to & x_F = p(x) \end{array}$$

Il est facile de vérifier que :

p est linéaire
Im p = F
Ker p = G
$p \circ p = p$

Inversement, soit p linéaire telle que $p \circ p = p$. Posons F = Im p et G = Ker p. Alors F et G sont supplémentaires et p est le projecteur sur F parallèlement à G. En effet :

Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit x élément de $F \cap G$. Alors :

$$\begin{cases} x \in F \Rightarrow \exists z \in E, x = p(z) \\ x \in G \Rightarrow p(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow p \circ p(z) = 0 = p(z) = x$$

Montrons que E = F + G. En effet, pour tout x de E, $x = p(x) + x - p(x)$ avec $p(x)$ élément de F et $x - p(x)$ élément de G comme on le vérifie facilement.

La décomposition précédente prouve d'ailleurs que p est le projecteur sur F parallèlement à G. Il y a cependant deux cas dégénérés :

F = E et G = {0}. Dans ce cas, p = Id.
F = {0} et G = E. Dans ce cas, p = 0

La symétrie par rapport à F parallèlement à G est définie par :

$$\begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x = \underset{\in F}{x_F} + \underset{\in G}{x_G} & \to & x_F - x_G = s(x) \end{array}$$

On vérifiera que :

s est linéaire.
Im s = E
Ker s = {0}
F = Ker(s–Id) = Im(s+Id)
G = Ker(s+Id) = Im(s–Id)
$s \circ s$ = Id

Inversement, si s est un endomorphisme tel que $s \circ s$ = Id, alors, posant F = Ker(s–Id) et G = Ker(s+Id), on a s symétrie par rapport à F parallèlement à G, avec comme cas dégénéré, s = Id et s = –Id.

3– Le théorème du rang

PROPOSITION

Soit u une application linéaire de E dans F. Alors u définit un isomorphisme de tout supplémentaire de Keru sur Imu.

Démonstration :
Soit E' un supplémentaire de Ker$u$ et considérons la restriction de u à E'.
Montrons que u : E' $\rightarrow$ Im u est un isomorphisme.
Cette restriction est injective. En effet :

$$x \in \text{Ker } u|_{E'} \Rightarrow x \in E' \text{ et } u(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } u \cap E' = \{0\} \Rightarrow x = 0$$

Elle est également surjective. En effet :

$$y \in \text{Im } u \Rightarrow \exists\, x \in E,\, y = u(x)$$

or x peut s'écrire $v + w$ avec v dans Ker u et w dans E', de sorte que $y = u(w)$ et y appartient à Im $u|_{E'}$.

Cette proposition ne signifie nullement que Im u et Ker u sont en somme directe.

Dans le cas où u est une forme linéaire non nulle (dont l'image est donc $\mathbb{K}$), la proposition s'exprime sous la forme : la forme linéaire u définit un isomorphisme de tout supplémentaire de Ker$u$ sur $\mathbb{K}$. Elle exprime le fait que le supplémentaire de Ker$u$ est une droite. On dit que Ker$u$ est un hyperplan.

THEOREME
Soit u une application linéaire de E, espace vectoriel de dimension finie, dans F. Alors :

$$\dim E = \dim \text{Ker}u + \dim \text{Im}u$$

Démonstration 1 :
En utilisant la proposition précédente, on a E = E' $\oplus$ Ker$u$ avec E' isomorphe à Imu. On a donc :

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim E' + \dim \text{Ker}u \\ &= \dim \text{Im}u + \dim \text{Ker}u \end{aligned}$$

Démonstration 2 :
On peut aussi donner une démonstration directe. Soit $(V_1, ..., V_p)$ une base de Ker$u$, complétée en $(V_1, ..., V_n)$ base de E. Alors $(u(V_1), ..., u(V_n))$ engendre Imu. Comme $u(V_1) = ... = u(V_p) = 0$, un système générateur de Imf est en fait $(u(V_{p+1}), ..., u(V_n))$. Il suffit de montrer que ce système est libre pour pouvoir conclure que :

$$\dim \text{Im}u = n - p = \dim E - \dim \text{Ker}u.$$

Soit une combinaison linéaire $\lambda_{p+1}u(V_{p+1}) + ... + \lambda_n u(V_n) = 0$
$\Rightarrow$ $u(\lambda_{p+1}V_{p+1} + ... + \lambda_n V_n) = 0$
$\Rightarrow$ $\lambda_{p+1}V_{p+1} + ... + \lambda_n V_n \in \text{Ker}u$
$\Rightarrow$ $\exists\, \lambda_1, ..., \lambda_p,\ \lambda_{p+1}V_{p+1} + ... + \lambda_n V_n = \lambda_1 V_1 + ... + \lambda_p V_p$
$\Rightarrow$ $\forall\, i,\ \lambda_i = 0$ puisque le système $(V_1, ..., V_n)$ est libre
Donc $(u(V_{p+1}), ..., u(V_n))$ est libre

dim Imu s'appelle rang de u, noté rg$u$. C'est le rang d'un système de vecteurs engendrant Imu, par exemple $(u(e_1), ..., u(e_n))$ si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E. Si v est un isomorphisme, on a alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$ puisque $\text{rg}(v \circ u) = \dim v(u(E)) = \dim u(E) = \text{rg}(u)$. De même $\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(u)$ puisque $\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(u(v(e_1)), ..., u(v(e_n))) = \text{rg}(u(\varepsilon_1), ..., u(\varepsilon_n))$ avec $\varepsilon_i = v(e_i)$. Les ε_i forment une base car ce sont les images d'une base par un isomorphisme. On a alors $\text{rg}(u(\varepsilon_1), ..., u(\varepsilon_n)) = \text{rg}u$.

Dans le cas où u est une forme linéaire non nulle et donc Ker$u$ un hyperplan, on a :

$$\dim \text{Ker}u = \dim E - 1$$

APPLICATIONS : Soit f linéaire de E dans F. Il y a équivalence entre :
i) f est un isomorphisme

ii) dimE = dimF et f injective
iii) dimE = dimF et f surjective.

Montrons par exemple ii) $\Rightarrow$ i). On a :
dim F = dim E = dim Ker$f$ + dim Imf = dim Imf car f est injective
$\Rightarrow$ Imf = F $\Rightarrow$ f surjective.
On montre de même iii) $\Rightarrow$ i). Les réciproques sont évidentes.

Ainsi, pour un endomorphisme en dimension finie, il y a équivalence entre f bijective, f injective, f surjective.

EXERCICE : Soit x_1, ..., x_n n réels distincts et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ quelconque. Alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que :

$$\forall\, i,\ P(x_i) = f(x_i)$$

On réfléchira à une démonstration directe avant de consulter la suite. On verra que la question est loin d'être évidente.

Considérons l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

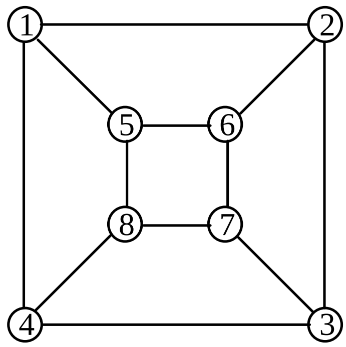
$$\Phi : P \to \begin{pmatrix} P(x_1) \\ \dots \\ P(x_n) \end{pmatrix}$$

On vérifie trivialement qu'il s'agit d'une application linéaire. Les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension. Φ est injective ; en effet, soit P tel que $\Phi(P) = 0$. Alors P, polynôme de degré inférieur ou égal à n–1 s'annule en n points distincts. P est donc nul. On en conclut que Φ est un isomorphisme, et donc que Φ est surjective. Considérons le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$. Il existe un et un seul antécédent P par Φ, et donc un et un seul polynôme P tal que : $\forall\, i$, $P(x_i) = f(x_i)$.

Annexe : une application du théorème du rang en S.I.

En Sciences Industrielles, un mécanisme est modélisé par des solides indéformables S_1, S_2, ..., S_n ayant entre eux des liaisons, traduisant les mouvements possibles entre les pièces. Notons L_{ij} une liaison entre le solide S_i et le solide S_j. Il n'existe bien évidemment pas des liaisons entre tous les solides du mécanisme, de sorte que L_{ij} n'est pas nécessairement défini pour tout i et j. On a par ailleurs $L_{ij} = L_{ji}$ lorsqu'une telle liaison existe.

Le mécanisme est symbolisé par un graphe de structure, ayant des sommets et des arêtes. Il y a autant de sommets que de solides (soit n), et une arête relie le sommet S_i et S_j si et seulement si une liaison L_{ij} existe. Autrement dit, les arêtes représentent les liaisons entre solides. Voici un exemple de graphe de structure, où les sommets (ou solides) sont numérotés de 1 à 8 :



Nous supposerons toujours un graphe de structure connexe, c'est-à-dire qu'on peut se rendre d'un sommet quelconque à un autre sommet en suivant un chemin du graphe (sinon, cela voudrait dire que l'on dispose de deux mécanismes disjoints !!).

Un cycle est un chemin fermé ne rencontrant pas deux fois la même arête, par exemple 1-4-8-5-1 ou 1-4-8-7-3-2-1. On peut définir la notion de cycles indépendants, et de nombre cyclomatique. Mathématiquement, cette notion d'indépendance est identique à la notion de système de vecteurs indépendants. Précisons cela.

Le corps de base utilisé sera inhabituel. Il s'agit du corps constitué des deux éléments 0 et 1, avec comme règle de la somme 1 + 1 = 0. Ce corps est noté $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On peut le voir aussi comme le corps des deux éléments {pair,impair} avec les règles d'opérations usuelles sur les nombres pairs et impairs. La caractéristique essentielle de ce corps est que :

$$\forall x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x + x = 0$$

Considérons maintenant F espace vectoriel de dimension n (le nombre de solides) sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, dont une base est notée $(S_1, ..., S_n)$. Autrement dit, les sommets (ou les solides) désignent les vecteurs d'une base de F. Un vecteur quelconque de F s'écrit $S_{i_1} + S_{i_2} + ... + S_{i_k}$ où les indices i_1, i_2, ..., i_k sont distincts (car s'il y a deux indices identiques, on a $S_i + S_i = (1 + 1) S_i = 0 S_i = 0$).

Considérons également E espace vectoriel de dimension p (le nombre de liaisons) sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, dont une base sont les vecteurs L_{ij}.Un vecteur quelconque de E s'écrit $\sum L_{ij}$ où les indices sont également distincts.

Définissons enfin une application linéaire δ de E dans F, appelée *bord* en donnant les images des vecteurs de base de E. Si L_{ij} est une liaison entre S_i et S_j alors $\delta(L_{ij}) = S_i + S_j$. Par exemple, dans le graphe de structure dessiné ci-dessus :

$$\delta(L_{56}) = S_5 + S_6$$

$$\delta(L_{56} + L_{67} + L_{73}) = \delta(L_{56}) + \delta(L_{67}) + \delta(L_{73}) = S_5 + S_6 + S_6 + S_7 + S_7 + S_3$$

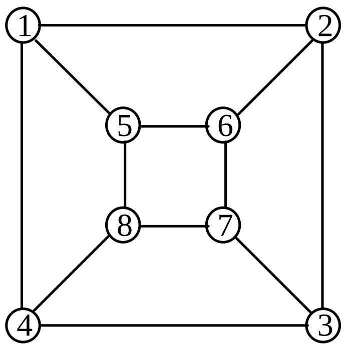
$$= S_5 + S_3 \quad \text{puisque } S_6 + S_6 = 0 = S_7 + S_7$$

On comprend pourquoi δ s'appelle *bord*. On a calculé le bord (i.e. les extrémités) du chemin 5-6-7-3.

Quelle est l'image de δ ? Un sommet isolé ne peut être dans cette image, car $\delta(L_{ij})$ fait intervenir deux sommets et il en résulte que $\delta(\sum L_{ij})$ est combinaison linéaire d'un nombre pair de sommets (même après simplification). L'application δ ne peut être surjective. Montrons que son rang est $n-1$ (un de moins que le nombre de sommets). Il suffit de montrer que, par exemple, le système libre $(S_1 + S_2, S_1 + S_3, ..., S_1 + S_n)$ est constitué de vecteurs de Im δ. Or nous avons supposé le graphe connexe, ce qui signifie que, pour tout i, il existe un chemin allant de S_1 à S_i. Cela ne signifie rien d'autre que le bord de ce chemin est $S_1 + S_i$ qui est donc bien dans Im δ.

Quel est le noyau de δ ? Par définition, nous appellerons cycle un élément de ce noyau. C'est un chemin ou une combinaison linéaire de chemins de bord nul. C'est le cas par exemple de $L_{14} + L_{48} + L_{85} + L_{51}$, dont l'image par δ est nul. Les cycles dits indépendants sont précisément ceux qui sont linéairement indépendants au sens mathématique du terme. Le théorème du rang nous donne la dimension de Ker δ. C'est $\mu = p - \text{rg } \delta = p - (n - 1) = p - n + 1$. Ce nombre est dit nombre cyclomatique du graphe. C'est le nombre maximal de cycles indépendants. Dans l'exemple précédent, $\mu = 12 - 8 + 1 = 5$. Il y a cinq cycles indépendants, par exemple :

$C_1 = L_{15} + L_{58} + L_{84} + L_{41}$
$C_2 = L_{12} + L_{26} + L_{65} + L_{51}$
$C_3 = L_{26} + L_{67} + L_{73} + L_{32}$
$C_4 = L_{37} + L_{78} + L_{84} + L_{43}$
$C_5 = L_{14} + L_{43} + L_{32} + L_{21}$



Tout autre cycle est combinaison linéaire de ces cycles, par exemple :

$L_{56} + L_{67} + L_{78} + L_{85} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$
$L_{15} + L_{56} + L_{67} + L_{73} + L_{32} + L_{21} = C_2 + C_3$

Le nombre cyclomatique s'interprête aussi comme le nombre minimal d'arêtes à supprimer pour qu'il n'y ait plus de cycles. En effet, si le graphe possède au moins un cycle, on enlève une arête de ce cycle. Cela ne déconnecte pas le graphe, mais diminue p de 1. Le nombre cyclomatique diminue donc de 1 également, et on itère le procédé, jusqu'à obtenir, après avoir enlevé successivement p arêtes, un nombre cyclomatique nul correspondant à un graphe sans cycle (δ est injective).

Le nombre cyclomatique est à relier à la formule d'Euler reliant le nombre de faces, d'arêtes et de sommets d'un polyèdre.