EQUATIONS DIFFERENTIELLES

PLAN

Résoudre une équation différentielle $y' = f(x,y)$ sur un intervalle I, c'est trouver une fonction $y(x)$ définie sur I vérifiant :

$$\forall x \in \text{I}, y'(x) = f[x,y(x)]$$

Les courbes représentatives des fonctions solutions s'appellent courbes intégrales.

I : Equations différentielles linéaires du premier ordre

1– Définition

DEFINITION :
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation du type :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

Une fonction f est solution de cette équation sur un intervalle I si

$$\forall x \in I, a(x)f '(x) + b(x)f(x) = c(x)$$

Par exemple, la fonction $\exp(-\frac{x^2}{2})$ est solution de l'équation $y' + xy = 0$. Les fonctions considérées peuvent éventuellement être à valeurs complexes. Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f = g + ih$ avec g et h fonctions à valeurs réelles dérivables, on pose $f' = g' + ih'$. Ainsi, pour a complexe, la dérivée de e^{ax} est ae^{ax} (cf le chapitre *Complexes* dans le fichier COMPLEXE.PDF).

2– Equations à coefficients constants

Il s'agit d'équations pour lesquelles les fonctions a et b sont constantes. Quitte à diviser par a et à renommer les coefficients, on peut se ramener à une équation du type :

$$y' + ay = c(x)$$

<u>a) Equation homogène (ou équation sans second membre)</u> :

On appelle ainsi l'équation $y' + ay = 0$. Quelles sont ses solutions sur $\mathbb{R}$, avec a réel ?

❑ Il y a la solution $y = 0$.

❑ Cherchons les solutions ne s'annulant en aucun point. On peut alors écrire : $\dfrac{y'}{y} = -a$

$\Rightarrow \ln|y| = -ax + \text{Cte}$, en prenant une primitive de chaque membre

$\Rightarrow |y| = e^{\text{Cte}}.e^{-ax}$

La fonction y ne s'annulant pas et étant continue, elle garde un signe constant. En posant $\lambda = e^{\text{Cte}}$ ou $-e^{\text{Cte}}$ suivant le signe de y, on obtient :

$$y = \lambda\, e^{-ax}$$

❑ Existe–t–il d'autres solutions, par exemple des solutions s'annulant en certains points ? Qu'en est-il si a (et donc y) sont complexes ? Montrons que les solutions sont de la même forme (mais avec λ complexe si a est complexe). Il suffit de montrer que, si y est une solution, alors ye^{ax} est constant. Posons donc z la fonction égale à ye^{ax}. Pour montrer que z est constant, il suffit de calculer sa dérivée :

$$z' = y'e^{ax} + aye^{ax} = 0$$

$z' = 0$ donc z est constante (complexe si les fonctions sont à valeurs complexes).

Ces résultats permettent d'énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION :

Soit a réel ou complexe. Alors :

i) les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont de la forme $y = \lambda e^{-ax}$, où λ est un scalaire quelconque. Elles forment un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est la fonction e^{-ax}.

ii) Si l'on fixe une condition $y(x_0) = y_0$, alors cette solution est unique.

iii) En particulier, si y s'annule en un point, y est identiquement nulle.

<u>b) Caractérisation de l'exponentielle</u> :

α étant un complexe, il résulte du paragraphe précédent (avec $\alpha = -a$) que l'exponentielle est caractérisée par l'équation différentielle et la condition initiale suivantes :

$$y = e^{\alpha x} \Leftrightarrow y' = \alpha y \text{ et } y(0) = 1$$

Une autre caractérisation de l'exponentielle repose sur une équation fonctionnelle. Si $f(t) = e^{\alpha t}$ on a $f(t + u) = f(t)f(u)$ y compris lorsque α est complexe. Réciproquement, soit $f(t + u) = f(t)f(u)$ avec f fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. En dérivant la relation par rapport à u, on a :

$$f'(t + u) = f(t)f'(u)$$

Si on pose $u = 0$ et $f'(u) = \alpha$, on obtient $f'(t) = \alpha f(t)$. Cette équation a pour solution $f(t) = e^{\alpha t} f(0)$. Reste à calculer $f(0)$. La relation $f(t + u) = f(t)f(u)$ avec $t = u = 0$ conduit à $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ et f est identiquement nulle, ou $f(0) = 1$ et $f(t) = e^{\alpha t}$. Finalement :

$$\forall\, t, \forall\, u, f(t + u) = f(t)f(u) \Leftrightarrow f = 0 \text{ ou } \exists\, \alpha, \forall\, t, f(t) = e^{\alpha t}$$

<u>c) Equation avec second membre</u> :

Considérons l'équation $y' + ay = c(x)$.
Soit y_0 solution de cette équation. On remarque alors que :

i) si z est solution de l'équation homogène associée, alors $y_0 + z$ est solution de l'équation complète. En effet :

$y_0' + ay_0 = c(\text{x})$
$z' + az = 0$
$\Rightarrow \quad (y_0 + z)' + a(y_0 + z) = c(x)$

ii) Inversement, si y est solution de l'équation complète, alors $y - y_0$ est solution de l'équation homogène. En effet :

$y' + ay = c(x)$
$y_0' + ay_0 = c(x)$
$\Rightarrow \quad (y - y_0)' + a(y - y_0) = 0$

La conséquence de cette remarque est la suivante. Pour trouver TOUTES les solutions y de l'équation complète, il suffit de trouver les solutions z de l'équation homogène associée (ce qu'on sait faire), et de leur ajouter UNE solution particulière de l'équation complète. Voici deux cas :

❑ Si $c(x) = \text{P}(x)e^{kx}$ où P est un polynôme de degré n et k une constante réelle ou complexe (ce dernier cas permet de traiter les fonctions trigonométriques). Cherchons y sous la forme $\text{Q}(x)e^{kx}$. On obtient l'équation suivante, après simplification :

$$\text{Q}'(x) + (k + a)\text{Q}(x) = \text{P}(x)$$

Si l'on cherche les coefficients de Q, de degré n, cela revient à résoudre un système triangulaire de n+1 équations à n+1 inconnues. Les coefficients de la diagonale valent k+a. Il y a donc une solution si $k \neq -a$. Par contre, si $k = -a$, on obtient $\text{Q}'(x) = \text{P}(x)$ et il faut choisir Q de degré n+1.

❑ Si $c(x)$ est une fonction quelconque, on cherche y sous la forme :

$$y = \lambda(x)e^{-ax}.$$

Cette méthode est connue sous le nom de méthode de variation de la constante. On prend la solution de l'équation homogène, mais au lieu de prendre λ constant, on prend λ variable. On est amené à résoudre l'équation suivante, après simplification :

$\lambda'(x)e^{-ax} = c(x)$, d'où $\lambda'(x) = c(x)e^{ax}$ et il suffit d'intégrer cette dernière fonction.

On remarque également que, si y_1 est solution particulière avec second membre b_1 et si y_2 est solution particulière avec second membre b_2, alors $y_1 + y_2$ est solution particulière avec second membre $b_1 + b_2$:

$$\begin{cases} y_1' + ay_1 = b_1 \\ y_2' + ay_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow (y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = b_1 + b_2$$

C'est ce qu'on appelle le principe de superposition.

EXEMPLES :

❑ Résoudre $y' + y = e^{2x}$

La solution de l'équation homogène est $y = \lambda e^{-x}$

Une solution particulière de la forme ae^{2x} est $\frac{1}{3}e^{2x}$

La solution générale est donc $\frac{1}{3}e^{2x} + \lambda e^{-x}$

❑ Résoudre $y' + y = e^{-x}$

La solution de l'équation homogène est $y = \lambda e^{-x}$

Une solution particulière de la forme axe^{-x} est xe^{-x}

La solution générale est donc $xe^{-x} + \lambda e^{-x}$

❑ Résoudre $y' + 2y = x^2e^{-2x} + 2e^{3x} + 1 + x$

La solution de l'équation homogène est $y = \lambda e^{-2x}$

Par linéarité, il suffit de chercher des solutions particulières pour chaque terme du second membre, et de les ajouter.

Solution avec second membre x^2e^{-2x}. On cherche une solution sous la forme $y = (ax^3 + bx^2 + cx)e^{-2x}$. (Il est inutile de prendre un terme constant, car on obtient alors une solution de l'équation homogène, qui n'a aucune contribution au terme du second membre). On obtient l'équation :

$$3ax^2 + 2bx + c = x^2. \text{ D'où } y = \frac{x^3}{3}\,e^{-2x}$$

Solution avec second membre $2e^{3x}$. Une solution de la forme ae^{3x} est $\frac{2}{5}\,e^{3x}$.

Solution avec second membre $1 + x$. Une solution de la forme $ax + b$ est $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{4}$

La solution générale est donc :

$$y = \lambda e^{-2x} + \frac{x^3}{3}\,e^{-2x} + \frac{2}{5}\,e^{3x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

❑ Résoudre $y' - y = \cos x$

Il suffit de résoudre avec comme second membre e^{ix}. Soit y la solution. Il n'est pas difficile de voir que le conjugué de y sera solution de l'équation avec second membre e^{-ix}, et donc par linéarité, que sa partie réelle (demi–somme des solutions trouvées) est solution avec second membre égal à $\cos x$.

La solution de l'équation homogène est $y = \lambda e^{x}$

Une solution particulière de la forme ae^{ix} est $\frac{1}{i-1}\,e^{ix} = -\,\frac{1+i}{2}\,e^{ix}$

Sa partie réelle est $-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$

La solution générale est donc $\frac{\sin x - \cos x}{2} + \lambda e^{x}$

3– Equations à coefficients non constants

Soit une telle équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$. Nous la résoudrons sur un intervalle I sur lequel a ne s'annule pas.

<u>Equation homogène ou équation sans second membre</u>

On appelle ainsi l'équation $a(x)y' + b(x)y = 0$. Quelles sont ses solutions sur dans le cas réel ?

❑ Il y a la solution $y = 0$.

❑ Cherchons les solutions ne s'annulant en aucun point. On peut alors écrire :

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

$\Rightarrow \quad \ln|y| = G(x) + \text{Cte}$ où G est une primitive de $-\dfrac{b(x)}{a(x)}$

$\Rightarrow \quad |y| = e^{\text{Cte}}.e^{G(x)}$

La fonction y ne s'annulant pas, elle garde un signe constant. En posant $\lambda = e^{\text{Cte}}$ ou $-e^{\text{Cte}}$ suivant le signe de y, on obtient :

$$y = \lambda\, e^{G(x)}$$

❑ Montrons qu'il n'y a pas d'autres solutions. Si y est une telle solution, montrons que $ye^{-G(x)}$ est constante. Posons $z = ye^{-G(x)}$. On a alors :

$$z' = y'e^{-G(x)} - G'(x)ye^{-G(x)} = e^{-G(x)}\left(y' + \frac{b(x)}{a(x)}y\right) = 0$$

Ainsi, $z' = 0$ donc z est constante.

Ces résultats permettent d'énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION :

Soit $a(x)y' + b(x)y = 0$ une équation différentielle linéaire du premier ordre. Alors :

i) les solutions de cette équation sur un intervalle I où la fonction a ne s'annule pas forment un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est la fonction $e^{G(x)}$ où G est une primitive de $-\dfrac{b(x)}{a(x)}$.

ii) Si l'on fixe une condition $y(x_0) = y_0$, alors cette solution est unique.

iii) En particulier, si y s'annule en un point, y est identiquement nulle.

Equation avec second membre

Considérons l'équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$. Soit y_0 solution de cette équation. On remarque, comme dans le cas des équations à coefficients constants, que :

i) si z est solution de l'équation homogène associée, alors $y_0 + z$ est solution de l'équation complète.

ii) Inversement, si y est solution de l'équation complète, alors $y - y_0$ est solution de l'équation homogène.

La conséquence de cette remarque est la suivante. Pour trouver TOUTES les solutions y de l'équation complète, il suffit de trouver les solutions z de l'équation homogène associée (ce qu'on sait faire), et de leur ajouter UNE solution particulière de l'équation complète. On peut appliquer la méthode de variation de la constante . On cherche une solution y sous la forme :

$$y = \lambda(x)e^{G(x)} \text{ (où } e^{G(x)} \text{ est solution de l'équation homogène)}$$

Après simplification, cela conduit à l'équation :

$a(x)\lambda'(x)e^{G(x)} = c(x)$

$\Rightarrow \quad \lambda'(x) = \dfrac{c(x)}{a(x)}e^{-G(x)}$. Il suffit alors de chercher une primitive de λ'.

Exemples

❑ $xy' + y = 3x^2$

Résolution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \text{ d'où } y = \frac{\lambda}{x}$$

Résolution de l'équation avec second membre :

$$y = \frac{\lambda(x)}{x} \text{ conduit à } \lambda' = 3x^2 \text{ d'où } \lambda = x^3$$

La solution générale est donc :

$$y = x^2 + \lambda/x$$

Il existe une solution sur $\mathbb{R}$: $y = x^2$ et c'est la seule.

❑ $xy' - 2y = 0$

Résolution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} \text{ d'où } y = \lambda x^2$$

Mais quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$?

❑ $xy' = ay$ et $y(1) = 1$, pour $x > 0$

$$\frac{y'}{y} = \frac{a}{x} \text{ d'où } \ln|y| = a\ln x + \mathrm{C}$$

Les conditions initiales imposent C = 0, d'où $y = x^a$.

4- Exemple d'équation non linéaire

On sait résoudre quelques types d'équation non linéaire. Considérons par exemple $y' = e^{x+y}$. Cette équation est dite à variables séparables car on peut séparer les termes en y des termes en x.

$$y'e^{-y} = e^x$$

$$\Leftrightarrow \quad -e^{-y} = e^x + \mathrm{A}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\ln(\mathrm{A} - e^x)$$

Les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par une translation.

5– La méthode d'Euler

La méthode d'Euler consiste à donner une approximation numérique des solutions d'équations différentielles. Soit l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ où $f(x,y) = -a(x)y + b(x)$. On choisit un pas h. On cherche une solution approchée de l'équation, vérifiant $y(x_0) = y_0$. On approxime la solution exacte y par une fonction affine par morceaux sur les intervalles $[nh,(n+1)h]$, les valeurs de y en nh valant y_n, défini de la façon suivante. On pose, par récurrence :

$$\begin{cases} x_n = x_0 + nh \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n) \end{cases}$$

En effet, au point (x_n, y_n) d'une courbe intégrale, la tangente a pour pente $y'(x_n) = f(x_n, y_n)$ et la courbe est approximée par un segment de droite avec la dite pente.

Si f est C^1, on peut montrer que la fonction approchée converge vers la solution exacte au sens suivant : soit $[0, x]$ un intervalle subdivisé en n intervalles de longueur égales $h = \frac{x}{n}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\underset{0 \le p \le n}{\text{Max}} \left| y_p - y(x_p) \right|$ tend vers 0. Nous nous contenterons de comparer y_n et $y(x)$ sur quelques exemples.

EXEMPLE 1 : $y' = y$
On prend $x_0 = 0$. La solution est évidemment $y = y_0 e^x$. La méthode d'Euler donne :

$$y_{n+1} = y_n + hy_n \Rightarrow y_n = y_0(1+h)^n$$

Si $nh = x$, quand n tend vers l'infini, on obtient à la limite :

$y(x) = y_0 e^x$ qui est la solution exacte.

EXEMPLE 2 : $y' = -xy$
La solution est donnée par $y = y_0 \exp(-x^2)$. La méthode d'Euler conduit à considérer la suite $y_{n+1} = y_n - nh^2 y_n = (1-nh^2)y_n$. Une programmation sur calculatrice conduit cependant à une limite tendant vers ∞ en changeant de signe lorsque n tend vers l'infini, h étant fixé, alors que la solution tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini. (Prendre par exemple $h = \dfrac{1}{9}$ et calculer 200 à 300 termes). Cela est dû aux approximations qui sont multipliées par n à chaque itération, de sorte que l'erreur commise est de l'ordre de $n!$. On conçoit donc les difficultés de prévision que l'on peut rencontrer lorsque l'équation différentielle n'est pas explicitement résoluble.

II : Equations différentielles linéaires du second ordre

1– Définition

DEFINITION :
On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation du type :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

Une fonction f est solution de cette équation sur un intervalle I si

$$\forall x \in I,\ a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x) = d(x)$$

2– Equations à coefficients constants

Il s'agit d'équations pour lesquelles les fonctions a, b et c sont constantes. On a donc une équation du type :

$$ay'' + by' + cy = d(x)$$

Nous supposerons $a \neq 0$, sinon, on a en fait une équation du premier ordre.

<u>a) Equation homogène ou équation sans second membre</u> :
On appelle ainsi l'équation $ay'' + by' + cy = 0$. Quelles sont ses solutions sur $\mathbb{R}$? Par analogie avec ce qu'on a trouvé pour les équations du premier ordre, cherchons les solutions sous la forme : $y = e^{rx}$. Lorsque l'on remplace dans l'équation, on obtient, après simplification :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Cette équation s'appelle équation caractéristique associée à l'équation différentielle. Elle admet toujours des solutions, éventuellement complexes si le discriminant est négatif ou si a, b et c sont des complexes.

Cherchons d'autres solutions sous la forme $y = f(x)e^{rx}$. On obtient :

$$y' = [f'(x) + rf(x)]\, e^{rx}$$
$$y'' = [f''(x) + 2rf'(x) + r^2 f(x)]\, e^{rx}$$

En reportant dans l'équation, on obtient, après simplification de l'exponentielle :

$$af'' + (2ar+b)f' + (ar^2+br+c)f = 0$$

Or r est solution de l'équation caractéristique $ar^2+br+c = 0$. D'où :

$$af'' + (2ar+b)f' = 0.$$

Cette équation est une équation du premier ordre en f'. Sa solution est :

$$f'(x) = \text{Cte} \times \exp[-\frac{(2ar+b)x}{a}]$$

On distingue alors deux cas :

i) si $2ar+b \neq 0$, alors, en intégrant à nouveau,on a :

$$f(x) = \text{A} \times \exp[-\frac{(2ar+b)x}{a}] + \text{B} \quad \text{et}$$

$$y = \text{A} \times \exp[-\frac{(ar+b)x}{a}] + \text{B} \times e^{rx}$$

Or $-\frac{ar+b}{a}$ n'est autre que l'autre racine de l'équation caractéristique. Ainsi y est combinaison linéaire des deux solutions exponentielles trouvées. La condition $2ar+b \neq 0$ est équivalente à :

$r \neq -\frac{b}{2a}$ ou encore

$\Delta \neq 0$ où Δ est le discriminant de l'équation caractéristique.

Dans le cas où a, b et c sont réels et où les racines r et r' sont complexes, alors r et r' sont conjuguées, et l'on peut prendre des combinaisons linéaires de leur demi–somme et de leur demi-différence. Ainsi, si $r = \alpha + i\beta$, alors $r' = \alpha - i\beta$, et y est combinaison linéaire de $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

ii) Si $2ar+b = 0$, on remarque d'abord que cette condition équivaut à $r = -\frac{b}{2a}$ ou encore à $\Delta = 0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique admet une racine double, et il n'y a qu'une solution exponentielle. On a alors :

$f' = \text{Cte}$ d'où, en intégrant à nouveau :

$f = \text{A}x + \text{B}$ et

$y = \text{A}xe^{rx} + \text{B}e^{rx}$

y est combinaison linéaire de deux fonctions, dont l'une est l'exponentielle déjà trouvée.

Ces résultats permettent d'énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION :

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Alors les solutions de cette équation sont de la forme suivante :

i) Soit (*) $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique associée et Δ son discriminant.

si Δ est non nul, alors y est combinaison linéaire des deux fonctions e^{rx} et $e^{r'x}$ où r et r' sont solutions de (*).

si Δ est nul, alors y est combinaison linéaire des deux fonctions e^{rx} et xe^{rx} où r est racine double de (*).

ii) Ces solutions forment un espace vectoriel de dimension 2 *iii) Dans le cas réel, si Δ est négatif, alors on peut préférer écrire y comme combinaison linéaire des deux fonctions $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ où $r = \alpha + i\beta$ et $r' = \alpha - i\beta$ sont solutions conjuguées de (*).*

EXEMPLES :

❑ Résoudre $y'' - 2y' + y = 0$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

dont les solutions sont 1, racine double. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

$$y = \mathrm{A}xe^x + \mathrm{B}e^x$$

❑ Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 0$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

dont les solutions sont 1 et 2. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

$$y = \mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^x$$

❑ Résoudre $y'' + y' + y = 0$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + r + 1 = 0$$

dont les solutions sont j et j^2, racines complexes. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

sur $\mathbb{C}$: $y = \mathrm{A}e^{jx} + \mathrm{B}e^{j^2x}$ avec A et B complexes

ou $y = e^{-1/2x}(\mathrm{A}\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + \mathrm{B}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}))$ avec (d'autres) A et B complexes

sur $\mathbb{R}$: $y = e^{-1/2x}(\mathrm{A}\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + \mathrm{B}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}))$ avec A et B réels

$e^{-x/2}\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2})$ et $e^{-x/2}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de e^{jx}.

<u>b) Equation avec second membre</u> :

Considérons l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$. Soit y_0 solution de cette équation. On remarque alors que, comme dans le cas des équations du premier ordre :

i) si z est solution de l'équation homogène associée, alors $y_0 + z$ est solution de l'équation complète.

ii) Inversement, si y est solution de l'équation complète, alors $y - y_0$ est solution de l'équation homogène.

La conséquence de cette remarque est la suivante. Pour trouver TOUTES les solutions y de l'équation complète, il suffit de trouver les solutions z de l'équation homogène associée (ce qu'on sait faire), et de leur ajouter UNE solution particulière de l'équation complète. Il est facile de vérifier que le principe de superposition s'applique également dans le cas présent : si y_1 est solution particulière avec second membre d_1 et si y_2 est solution particulière avec second membre d_2, alors $y_1 + y_2$ est solution particulière avec second membre $d_1 + d_2$.

Voici un cas important : $d(x) = P(x)e^{kx}$ où P est un polynôme de degré n et k une constante réelle ou complexe (ce dernier cas permet de traiter les fonctions trigonométriques). Cherchons y sous la forme $Q(x)e^{kx}$.

$$y = Q(x)e^{kx}$$
$$y' = [Q'(x) + kQ(x)]e^{kx}$$
$$y'' = [Q''(x) + 2kQ'(x) + k^2Q(x)]e^{kx}$$

On obtient l'équation suivante, après simplification :

$$aQ''(x) + (2ka+b)Q'(x) + (ak^2+bk+c)Q(x) = P(x)$$

Si l'on cherche les coefficients de Q, de degré n, cela revient à résoudre un système triangulaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues. Les coefficients de la diagonale valent ak^2+bk+c. On reconnaît là le premier membre de l'équation caractéristique. Il y a donc une solution si k n'est pas racine de cette équation.

Si $ak^2+bk+c=0$ (autrement dit k est racine de l'équation caractéristique), la démarche précédente conduit à rechercher un polynôme Q, tel que $aQ''(x) + (2ka+b)Q'(x) = P(x)$, avec Q de degré $n+1$. On obtient un système triangulaire dont les termes de la diagonale valent $2ak+b$. Si ce terme est non nul, alors il est possible de trouver Q. Or $2ak+b$ non nul signifie k différent de $-\frac{b}{2a}$, et k étant racine de l'équation caractéristique, cela signifie que le discriminant est non nul, et donc que k est racine simple de l'équation.

Si $ak^2+bk+c=0$ et $2ak+b = 0$, alors k est racine de l'équation caractéristique et vaut $-\frac{b}{2a}$. cela signifie donc que le discriminant est nul, et donc que k est racine double de l'équation. On obtient alors l'équation $aQ''(x) = P(x)$, avec Q de degré $n+2$. a étant non nul, il est alors possible de trouver Q.

Nous ne nous intéresserons pas à d'autres expressions de d. Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION :
Soit $ay'' + by' + cy = P(x)e^{kx}$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, P étant un polynôme.

i) Si k n'est pas racine de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme $Q(x)e^{kx}$, avec degQ = degP.

ii) Si k est racine simple de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme $Q(x)e^{kx}$, avec degQ = degP + 1.

iii) Si k est racine double de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme $Q(x)e^{kx}$, avec degQ = degP + 2.

Exemples :

❑ Résoudre $y'' + y = \cos x$

L'équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$

La solution de l'équation homogène est $y = A\cos x + B\sin x$

Une solution particulière avec second membre e^{ix} se cherche sous la forme axe^{ix}. On trouve $\frac{1}{2}$ $i\,xe^{ix}$. On obtient une solution particulière avec second membre cosx en prenant la partie réelle. D'où $y = \frac{1}{2}\ x\sin x$.

La solution générale est donc $A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$.

❑ Résoudre $y'' - 2y' + y = e^x$

L'équation caractéristique est : $r^2 - 2r + 1 = 0$. 1 est racine double.

La solution de l'équation homogène est $y = Ae^x + Bxe^x$

Une solution particulière avec second membre e^x se cherche sous la forme ax^2e^x. On trouve $\frac{1}{2}x^2e^x$.

La solution générale est donc $Ae^x + Bxe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$.

Annexe : Résolution d'une équation particulière

Nous allons revenir sur l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = d\cos\omega t$$

où $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$, $d \geq 0$, et y une fonction de t. Ce type d'équation intervient dans un grand nombre de phénomènes physiques, où t représente le temps, en particulier en mécanique et en électrodynamique :

En Mécanique :

Un objet est soumis à une force de frottement opposée à sa vitesse et proportionnelle à celle–ci, à une force de rappel proportionnelle à son déplacement et enfin, à un régime forcé de pulsation ω. C'est le cas par exemple pour :

❑ le pendule élastique (masse–ressort) :

masse m

coefficient de frottement f

raideur du ressort k

force imposée de module F

L'équation du mouvement est donnée par :

$$mx'' + fx' + kx = F\cos\omega t$$

❑ le pendule de torsion :

moment d'inertie J

coefficient de frottement f

couple de rappel C

couple forcé de module G

L'équation du mouvement est donné par :

$$J\theta'' + f\theta' + C\theta = G\cos\omega t$$

❑ le pendule simple (masse au bout d'un fil de longueur l, dans un champ de gravitation g), pour des petites oscillations :

L'équation du mouvement est donnée par :

$$l\theta'' + g\theta = 0$$

En électrodynamique : Un circuit électrique comprend en série, une résistance R, une inductance L, et une capacité C. Il est soumis à une tension périodique U de pulsation ω. La quantité d'électricité Q traversant un point du circuit vérifie :

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = U \cos\omega t$$

Le cas étudié s'applique dans ces deux situations, ce qui signifie également que tout phénomène mécanique a un équivalent électrique, et inversement.

1– Equation homogène $ay'' + by' + cy = 0$

Cette équation correspond à un système qui n'est soumis à aucune oscillation forcée. L'équation caractéristique est :

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2 \text{ avec } \delta \text{ éventuellement imaginaire pur ou nul.}$$

Les racines sont donc :

$$r' = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } r'' = \frac{-b+\delta}{2a}$$

Si $b = 0$, alors δ est imaginaire pur et non nul, et les solutions sont des fonctions trigonométriques, sans atténuation de l'amplitude. Nous noterons $\frac{\delta}{2a} = i\omega_0$. ω_0 est appelé pulsation propre d'oscillation du système étudié, avec $\omega_0^2 = \frac{c}{a}$.

Si $b > 0$, la partie réelle de r' et r'' est strictement négative car $b^2 > \delta^2$. Les solutions sont des combinaisons linéaires d'exponentielles qui tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Si δ est imaginaire pur, ce qui se produit lorsque $b^2 < 4ac$, les solutions oscillent autour de 0, avec atténuation de l'amplitude.

Dans tous les exemples physiques proposés, $\frac{b}{a}$ est homogène à l'inverse d'un temps et peut donc être noté $\frac{1}{\tau_e}$. L'équation différentielle prend alors la forme :

$$y'' + \frac{y'}{\tau_e} + \omega_0^2 y = 0.$$

- Si $\boxed{\tau_e > \frac{1}{2\omega_0}}$ le système est faiblement amorti, Δ est négatif, δ est imaginaire pur. $r = -\frac{1}{2\tau_e} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau_e^2}}$. Les solutions y sont combinaisons linéaires de $\exp(-\frac{t}{2\tau_e})\cos(\omega t)$ et $\exp(-\frac{t}{2\tau_e})\sin(\omega t)$, avec une pulsation $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau_e^2}}$ légèrement inférieure à la pulsation propre.

On définit alors le facteur de qualité Q de l'oscillateur par l'expression :

$$Q = 2\pi\frac{E}{W}$$

où E est l'énergie emmagasinée par l'oscillateur et W = $|\Delta E|$ l'énergie dissipée au cours d'un cycle. Ces énergies sont, dans le cas mécanique ou électrique, proportionnelles au carré de l'amplitude de y. Nous donnerons donc une expression de Q dans le cas général de notre équation différentielle en prenant E égal à ce carré. Comme $y(t)$ est de la forme $y_0 \exp(-\frac{t}{2\tau_e}) \cos(\omega t + \varphi)$, l'amplitude vaut $y_0 \exp(-\frac{t}{2\tau_e})$. Au cours d'un cycle, par exemple entre les instants $t = 0$ et $t = \frac{2\pi}{\omega}$, l'énergie E passe de la valeur y_0^2 à $y_0^2 \exp(-\frac{t}{\tau_e})$. Donc W = $|\Delta E| = y_0^2 (1 - \exp(-\frac{t}{\tau_e}))$. Dans le cas où le système est faiblement amorti, $\frac{1}{\tau_e}$ est très faible, de sorte que W $\approx y_0^2 \frac{t}{\tau_e} = y_0^2 \frac{2\pi}{\omega\tau_e}$ et que ω est quasiment égal à la fréquence propre de résonance ω_0. On a alors :

$$Q = \omega\tau_e \approx \omega_0\tau_e$$

L'ordre de grandeur de Q pour un circuit RLC est $\frac{L\omega_0}{R}$. Pour un oscillateur mécanique, $Q = \frac{m\omega_0}{f}$ où f est le coefficient de frottement.

- Le cas limite (appelé amortissement critique) est obtenu lorsque $\boxed{\tau_e = \frac{1}{2\omega_0}}$, pour lequel $\Delta = 0$. On a alors $r = -\frac{1}{2\tau_e}$, et y est combinaison linéaire de $\exp(-\frac{t}{2\tau_e})$ et de $t \exp(-\frac{t}{2\tau_e})$.
- Si $\boxed{\tau_e < \frac{1}{2\omega_0}}$, le système est fortement amorti, Δ est positif, δ est réel. Il n'y a pas d'oscillation. on a $r = -\frac{1}{2\tau_e} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau_e^2} - \omega_0^2} = -\frac{1}{2\tau_e} \pm \beta$. y est combinaison linéaire de $\exp(-\frac{t}{2\tau_e}) \exp(\beta t)$ et $\exp(-\frac{t}{2\tau_e}) \exp(-\beta t)$. On préfèrera parfois prendre la demi-somme et la demi-différence de ces fonctions, faisant intervenir les fonctions trigonométriques sinus et cosinus hyperboliques, établissant un rapprochement formel avec le premier cas. y est alors combinaison linéaire de $\exp(-\frac{t}{2\tau_e}) \operatorname{ch}(\beta t)$ et $\exp(-\frac{t}{2\tau_e}) \operatorname{sh}(\beta t)$.

EXEMPLE : Si on impose les conditions initiales $y(0) = y_0$, et $y'(0) = 0$, on trouve respectivement :

$$y = y_0 \exp(-\frac{t}{2\tau_e}) [\cos(\omega t) + \frac{1}{2\omega\tau_e} \sin(\omega t)]$$

$$y = y_0 \exp(-\frac{t}{2\tau_e}) [1 + \frac{t}{2\tau_e}]$$

$$y = y_0 \exp(-\frac{t}{2\tau_e}) [\operatorname{ch}(\beta t) + \frac{1}{2\beta\tau_e} \sin(\beta t)]$$

L'amortissement critique correspond aux deux cas limites $\omega \to 0$ et $\beta \to 0$.
τ_e s'appelle durée de relaxation en énergie. L'énergie est, dans les exemples proposés, proportionnelle à y_0^2. La durée τ_e donne un ordre de grandeur de la durée au bout de laquelle l'énergie du système a diminué de $\frac{1}{e}$.

2– Solution particulière avec second membre

Cette équation correspond à un système qui est soumis à une oscillation forcée.
Lorsque $b > 0$, il y a toujours une solution particulière avec second membre $d \exp(i\omega t)$ sous la forme $y = A \exp(i\omega t)$, car $i\omega$ ne peut être solution de l'équation caractéristique. On obtient une solution avec second membre $d \cos\omega t$ en en prenant la partie réelle.
La solution générale est donc la somme d'une solution périodique de pulsation ω et de solutions exponentielles s'annulant en $+\infty$. Les solutions exponentielles n'interviennent physiquement que lors de la phase transitoire correspondant à la mise en route du système. La solution périodique correspond, elle, à la solution en régime permanent.

Lorsque $b = 0$, la situation est analogue sauf dans un cas, si ω est égal à ω_0, solution de l'équation caractéristique. Il y a alors une solution particulière avec second membre $d \exp(i\omega_0 t)$ sous la forme $y = At \exp(i\omega_0 t)$. On obtient une solution avec second membre $d \cos\omega_0 t$ en en prenant la partie réelle. On dit qu'il y a résonance. Dans ce cas, y prendra des valeurs arbitrairement grandes.

cas général	**Mécanique**	**Electricité**	
y	élongation x	charge Q	grandeur étudiée
y'	vitesse V	intensité I	dérivée
Le coefficient a s'oppose aux variations de la dérivée par inertie ou autoinduction	masse m	inductance L	Energie cinétique ou magnétostatique : $W = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} LI^2$
Le coefficient b est responsable des pertes d'energie	frottement f	résistance R	Puissance de l'effet Joule $P = fV^2 = RI^2$
Le coefficient c est celui du phénomène de rappel	raideur k	capacité$^{-1}$ $\frac{1}{C}$	Energie potentielle emmagasinée $W = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$
Durée de relaxation $\tau_e = \frac{a}{b}$	$\frac{m}{f}$	$\frac{L}{R}$	
Période T à la résonance $\frac{2\pi}{\omega_0}$ Pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{c/a}$	$2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ $\sqrt{\frac{k}{m}}$	$2\pi \sqrt{LC}$ $\frac{1}{\sqrt{LC}}$	
Le coefficient d est celui du moteur du phénomène	force F	tension U	Résistance = fV ou RI Rappel = kx ou $\frac{Q}{C}$
$b = d = 0$ $y = y_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$	pas de frottement pas de force imposée	pas de résistance pas de tension imposée	phénomène périodique non amorti

$b > 0$, $d = 0$ $\lim_{t \to \infty} y = 0$	frottement pas de force imposée	résistance pas de tension imposée	amortissement du phénomène
$b > 0$, $d > 0$ solution particulière $y = y_m \cos(\omega t + \varphi)$	frottement force imposée	résistance tension	régime stationnaire périodique asymptotique
$b = 0$, $d > 0$ Si $\omega \neq \omega_0$, alors y est somme de fonctions périodiques de pulsation ω et ω_0. Si $\omega = \omega_0$, il y a résonance	pas de frottement force imposée	pas de résistance tension imposée	

Le phénomène de résonance se produit en général avec un coefficient b non nul, quoique faible. Il est parfois recherché (enfant sur une balançoire donnant des impulsions à la fréquence propre de la balançoire, antenne en résonance avec une fréquence donnée), parfois évité (utilisation d'amortisseurs).

Le phénomène de résonance peut se révéler extrêmement dangereux. Citons l'effondrement du pont de Basse–Chaîne près d'Angers en 1850, sous les pas cadencés d'un bataillon en marche (226 morts). Depuis ce temps, les militaires rompent le pas lorsqu'ils traversent un pont.

Plus récemment, le pont de Tacoma, aux Etats–Unis, s'est effondré le 7 novembre 1940 sous l'effet du vent, quelques mois seulement après son inauguration. Cependant, dans ce dernier cas, l'effondrement ne serait pas dû à une action périodique extérieure mais plutôt à la formation de tourbillons sur le tablier du pont amplifiant peu à peu le mouvement du pont (lire Jean-Michel Courty, Edouard Kierlik, *Pont de Tacoma, la contre-enquête*, Pour la Science, n°364, (Février 2008), p.98-99) :