LES NOMBRES COMPLEXES

PLAN

I : Généralités

1– Historique

Les nombres complexes, tels que nous les utilisons aujourd'hui, datent du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Ils étaient cependant connus et utilisés depuis plusieurs siècles sous le nom de nombres imaginaires (terme qui est resté dans l'expression "partie imaginaire"). Ils sont apparus lorsque l'on a essayé de résoudre les équations du 3$^{\text{ème}}$ degré. Le premier à avoir résolu des équations du 3$^{\text{ème}}$ degré du type $x^3 + px = q$ ($p > 0$, $q > 0$) semble être Scipione Del Ferro (1465 – 1526), professeur à l'université de Bologne. Il ne publia pas sa découverte mais la transmit à son élève Antonio Maria Fior. En 1531, Tartaglia (1500 – 1557), soit à la lumière d'une indiscrétion, soit par sa propre invention, apprit également à résoudre les équations du 3$^{\text{ème}}$ degré. Croyant à une imposture, Fior lança un défi public à Tartaglia. A la fin du temps imparti, Tartaglia avait résolu toutes les équations de Fior, alors que celui–ci n'avait résolu qu'une seule équation de Tartaglia. La supériorité de Tartaglia provient du fait que ce dernier savait résoudre les équations du type $x^3 + px^2 = q$, chose que Fior ne savait pas faire. En 1539, Tartaglia accepta de dévoiler son secret à Cardan (1501 – 1576) qui le publia peu après, malgré la colère de Tartaglia. Un élève de Cardan, Ludovico Ferrari (1522 – 1565), parvint à résoudre les équations du 4$^{\text{ème}}$ degré. Signalons qu'on ne peut résoudre n'importe quelle équation algébrique par radicaux. C'est impossible pour la plupart des équations du 5ème degré, par exemple $x^5 + x - a = 0$, avec $a = 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11$ ...

Voici comment procède Cardan. Considérant l'identité :

$$(a + b)^3 = 3ab(a + b) + a^3 + b^3$$

Cardan explique en 1545 comment résoudre les équations du type :

$$x^3 = px + q$$

en posant $ab = \frac{p}{3}$ et $a^3 + b^3 = q$. Ayant trouvé a et b, une solution est donnée alors par $a + b$.

Exemple 1 : Résoudre $x^3 = 18x + 35$.

$$\begin{cases} ab = 6 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3b^3 = 6^3 = 216 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases}$$

Donc a^3 et b^3 sont racines de l'équation $X^2 - 35X + 216 = 0$, à savoir 8 et 27. Donc $a = 2$ et $b = 3$. Une solution de l'équation initiale est donc 5. Les autres solutions sont trouvées en factorisant :

$$x^3 - 18x - 35 = (x - 5)(x^2 + 5x + 7) \text{ etc...}$$

(Les équations du second degré à discriminant négatif sont considérées comme n'ayant pas de solution à l'époque).

Exemple 2 : Résoudre $x^3 = 15x + 4$

$$\begin{cases} ab = 5 \\ a^3 + b^3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3b^3 = 5^3 = 125 \\ a^3 + b^3 = 4 \end{cases}$$

Donc a^3 et b^3 sont racines de l'équation $X^2 - 4X + 125 = 0$. Cette équation admet un discriminant négatif. Elle est donc réputée ne pas avoir de solution. Est–ce à dire que l'équation initiale n'admet pas non plus de solution ? Si. Toute équation du troisième degré admet au moins une solution (pourquoi ?). Ici, 4 est racine évidente. Bombelli (1526–1573) eut l'idée de penser que les parties "impossibles" ou imaginaires devaient s'éliminer pour redonner la racine réelle. Il écrivit donc :

$$a^3 = 2 + \sqrt{-121} = 2 + 11\sqrt{-1} \Rightarrow a = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

$$b^3 = 2 - \sqrt{-121} = 2 - 11\sqrt{-1} \Rightarrow b = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

et $4 = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$

De fait, on peut vérifier que :

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

de sorte que la solution de Cardan vaut également $(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1})$, ce qui donne effectivement 4. Les solutions sont, en notation moderne :

$a = 2 + i$ et $b = 2 - i$ $\Rightarrow a+b = 4$

$a = (2+i)j$ et $b = (2-i)j^2$ $\Rightarrow a+b = -2 - \sqrt{3}$

$a = (2+i)j^2$ et $b = (2-i)j$ $\Rightarrow a+b = -2 + \sqrt{3}$

où $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ est racine cubique de 1. Les trois racines trouvées sont bien racines de :

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$$

Bombelli fut donc le premier à introduire une notation proche de notre notation moderne. Mais l'utilisation des nombres imaginaires a mis plusieurs siècles avant de s'imposer.

Girard (1595–1632) déclare :

De quelle utilité sont ces solutions impossibles[1] *? Je réponds : pour trois choses. Pour la certitude des règles générales, pour leur utilité, et parce qu'il n'y a pas d'autres solutions.*

Mais ses vues avancées à l'époque n'ont guère eu d'influence.

Il faut attendre le XIXème siècle pour que les nombres imaginaires soient universellement adoptés. La représentation géométrique des nombres complexes par les points du plan joue un grand rôle dans cette acceptation, le support géométrique apportant une caution aux yeux de nombreux mathématiciens de l'époque.

En 1798, Wessel qui est arpenteur, introduit un axe imaginaire perpendiculaire à l'axe réel. Il note ε pour $\sqrt{-1}$, et interprète les vecteurs du plan comme des nombres complexes.

Argand, quant à lui, interprète en 1806 les nombres négatifs comme ayant une direction opposé aux nombres positifs. A cette époque, on note encore $a : b :: c : d$ pour désigner le fait que la grandeur a est à la grandeur b ce que la grandeur c est à la grandeur d. Argand note donc que $1 : 1 :: -1 : -1$ et que $1 : -1 :: -1 : 1$, à savoir, 1 est à 1 ce que –1 est à –1, et 1 est à –1 ce que –1 est à 1. Il se demande alors quelle quantité x vérifiera $1 : x :: x : -1$, à savoir, 1 est à x ce que x est à –1. Il a l'idée de se placer dans le plan et de voir que la quantité x est celle qui est orthogonale à la droite définissant 1 et –1. x joue évidemment ici le rôle du complexe $\pm\, i$. Il propose d'abandonner le qualificatif d'imaginaire, et de qualifier x de *quantités médianes*.

Mais les mémoires de ces deux auteurs resteront confidentiels. Celui de Wessel, figurant dans les Mémoires de l'Académie des Sciences du Danemark, passera complètement inaperçu, et ne sera traduit en français qu'en 1897. Celui d'Argand aura plus de chance, puisqu'il fera l'objet d'articles dans les Annales de Gergonne en 1813-14. Les complexes prendront définitivement leur statut moderne grâce à l'influence de Gauss, dont le renom dépasse de loin celui des précédents personnages. Déjà en 1799, Gauss utilise implicitement le plan complexe dans sa thèse. En 1811, il écrit :

De même qu'on peut se représenter le domaine entier de toutes les quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même, on peut se figurer le domaine entier de toutes les quantités, les quantités réelles et imaginaires au moyen d'un plan indéfini où tout point, déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente pour ainsi dire la quantité a + bi.

Et en 1831 :

Si le point de vue que l'on avait de ce sujet était jusqu'à présent mauvais, et donc enveloppé de mystère et d'obscurité, c'est largement en raison d'une terminologie inadaptée qui aurait due être blâmée. Si, au lieu d'unité positive, négative et imaginaire — ou pire encore impossible — l'on avait nommé +1, –1 et $\sqrt{-1}$ *, disons, unité directe, inverse et latérale, on aurait à peine vu paraître une telle obscurité.*

ou encore :

Aussi longtemps que les quantités imaginaires étaient basées sur la fiction, elles n'étaient pas pleinement acceptées en mathématiques, mais plutôt regardées comme quelque chose que l'on devait tolérer ; elles étaient loin d'avoir acquis le même statut que les quantités réelles. Il n'y a plus aucune justification à une telle discrimination, maintenant que la métaphysique des nombres imaginaires a été pleinement éclairée, et qu'il a été montré qu'ils avaient une signification aussi réelle que les nombres négatifs.

C'est à partir de cette époque que Gauss emploie le terme "complexe" en lieu et place du terme "imaginaire". C'est également au cours du XIXème siècle que les nombres complexes commencent à être largement utilisés en physique.

[1] il s'agit des nombres complexes

2– Définition

L'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ est en bijection avec $\mathbb{R}^2$. Ses éléments sont notés $z = a+ib$, pour a et b réels. a est la partie réelle, b la partie imaginaire. i est un symbole n'ayant d'autre but que de distinguer partie réelle $Re(z) = a$ de sa partie imaginaire $Im(z) = b$. Les règles de calculs sont les règles usuelles de la somme et du produit, avec la règle $i^2 = -1$. La notation i est due à Euler (1707 – 1783). Ces règles donnent à $\mathbb{C}$ une structure appelée *corps*, comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$. Dans un corps, il y a deux opérations, somme et produit, et tout élément non nul $z = a + ib$ possède un inverse :

$$z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

comme on le vérifie facilement.

Depuis Gauss (1777 – 1855), on a adopté une représentation géométrique des complexes. Si on munit le plan d'un repère orthonormé, alors le complexe $z = a+ib$ peut se représenter :

– par le vecteur de composantes (a,b), vecteur dit d'affixe z.

– par le point de coordonnées (a,b), point dit d'affixe z.

3– Conjugaison

On définit une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$z = a+ib \longrightarrow \overline{z} = a-ib, \text{ conjugué de } z.$$

Cette application est une conjugaison et correspond géométriquement à une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. Il s'agit d'une involution (sa composée avec elle–même est égale à l'identité).

On vérifie facilement que l'on a les règles de calcul suivantes :

$$\overline{z} + \overline{z'} = \overline{z + z'} \qquad \overline{z}\,\overline{z'} = \overline{z\,z'} \qquad -\overline{z} = \overline{-z} \qquad 1/\overline{z} = \overline{1/z}$$

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

4– Module et inégalité triangulaire

Le module de $z = a + ib$ est $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Il s'interprète géométriquement comme la norme euclidienne du vecteur d'affixe z ou comme la distance du point d'affixe z à l'origine. De même, $|z - a|$ est la distance du point d'affixe z au point d'affixe a. Ainsi, R étant un réel strictement positif, $\{z, |z - a| < \mathrm{R}\}$ est le disque (dit ouvert) de centre a de rayon R. L'ensemble $\{z, |z - a| \leq \mathrm{R}\}$ s'appelle disque fermé de centre a de rayon R.

On vérifie facilement les règles de calculs suivantes :

$$|zz'| = |z||z'| \qquad |z| = |\overline{z}| \qquad z\overline{z} = |z|^2 \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \qquad |Re(z)| \leq |z| \qquad |Im(z)| \leq |z|$$

Seule l'inégalité triangulaire $\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$ est non évidente. Elle découle de la même propriété dans le plan euclidien. On peut aussi la démontrer directement de la façon suivante :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$\Leftrightarrow \quad |z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad |z|^2 + z\,\overline{z'} + \overline{z}\,z' + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad z\,\overline{z'} + \overline{z}\,z' \leq 2|z||z'|$$

On reconnaît dans le membre de gauche le double de la partie réelle de $z\,\overline{z'}$.

$$\Leftrightarrow \quad Re(z\,\overline{z'}) \leq |z||z'| \text{ ce qui est vrai car } Re(z\,\overline{z'}) \leq |z\,\overline{z'}|$$

Quant à la première inégalité, elle découle de la deuxième de la façon suivante :

$$|z| = |z + z' - z'| \leq |z + z'| + |z'|$$

$$\Rightarrow \quad |z| - |z'| \leq |z + z'|$$

De même en intervertissant les rôles de z et z'.

5– Argument

a) Définition :

L'argument d'un complexe non nul z est une mesure de l'angle $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{v})$ où $\boldsymbol{v}$ est le vecteur d'affixe z dans la base orthonormée $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$. On le note $\arg(z)$. Il est défini à 2π près. La valeur particulière appartenant à l'intervalle $]-\pi,\pi]$ est appelé argument principal. On notera par exemple :

$$\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$$

Si φ est l'argument de z, alors :

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

On vérifie aisément que :

$$\arg(\overline{z}) = \arg(1/z) = -\arg(z)$$
$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

Alors que l'addition d'un vecteur z' s'interprète géométriquement par une translation de vecteur le vecteur d'affixe z', le produit par z s'interprète comme la composée de :

- ❑ une homothétie de centre O de rapport $|z'|$
- ❑ une rotation de centre O d'angle $\arg(z')$.

On parle de similitude (directe) de centre O, de rapport $|z'|$ et d'angle $\arg(z')$.

Ainsi, le produit par i est une rotation de $\dfrac{\pi}{2}$. Le produit par $j = e^{2i\pi/3}$ est une rotation de $\dfrac{2\pi}{3}$.

b) Forme trigonométrique :

En vertu des formules (à connaître) :

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$\sin(\theta + \varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi)$$

on a :

$$(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \times (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

de sorte que la fonction $f : \theta \to \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ vérifie la propriété $f(\theta + \varphi) = f(\theta) \times f(\varphi)$. Il s'agit d'une relation fonctionnelle comparable à celle de l'exponentielle et il est convenu de noter $f(\theta) = e^{i\theta}$, de sorte que :

$$z = |z| e^{i\varphi} \text{ (forme trigonométrique d'un nombre complexe)}$$

avec

$$e^{i\theta} \times e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

Il est intéressant de remarquer qu'on utilise pour désigner la fonction f les symboles e et i, et pas une notation λ^θ, avec λ défini autrement, alors qu'a priori, n'importe quelle exponentielle de θ pouvait faire l'affaire. Pourquoi ? Parmi les multiples raisons possibles, on a :

$$f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta) = if(\theta)$$

Comme dans $\mathbb{R}$, la dérivée par rapport à θ de la fonction $e^{a\theta}$ est $ae^{a\theta}$, il est naturel de poser $f(\theta) = e^{i\theta}$, étendant ainsi la règle de dérivation d'une exponentielle au cas où $a = i$.

c) Exponentielle complexe :

Plus généralement, pour $z = x + iy$ complexe, on pose :

$$e^z = e^x [\cos(y) + i\sin(y)] = e^x \times e^{iy}$$

Il en résulte que la résolution de $e^z = a$ conduit à :

si $a = 0$ alors, il n'y a pas de solution

sinon, $z = x + iy$ avec $x = \ln|a|$ et $y = \arg(a) + 2k\pi$, soit $z = \ln|a| + i\arg(a) + 2ik\pi$

On vérifiera que $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$. On peut également vérifier que la dérivée de $t \to e^{at}$ avec a complexe est ae^{at}. En effet, si $a = x + iy$, alors :

$$e^{at} = e^{tx} [\cos(ty) + i\sin(ty)]$$

dont la dérivée par rapport à t est :

$$xe^{tx} [\cos(ty) + i\sin(ty)] + e^{tx} [-y\sin(ty) + iy\cos(ty)] = (x + iy)\, e^{tx} [\cos(ty) + i\sin(ty)]$$
$$= ae^{at}$$

d) Formule d'Euler :

Voici quelques formules :

$$e^{i\pi} = -1 \text{ (formule d'Euler)}$$
$$e^{2i\pi} = 1$$
$$e^{i\pi/2} = i$$
$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2e^{i\theta/2} \cos \frac{\theta}{2}$$
$$1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = -2ie^{i\theta/2} \sin \frac{\theta}{2}$$

On notera que les deux dernières formules sont équivalentes à :

$$\cos\theta = 2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin\theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2 \tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

en posant $t = \tan(\frac{\theta}{2})$. On a aussi :

$$\tan\theta = \frac{2 \tan(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Ces trois formules sont faciles à mémoriser. $\cos\theta$ est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$, et la seule façon de combiner les expressions $2t$, $1 + t^2$ et $1 - t^2$ en une fraction rationnelle paire définie sur $\mathbb{R}$ et de prendre le quotient $\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$.

De même, $\sin\theta$ est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$, et la seule façon de combiner les expressions $2t$, $1 + t^2$ et $1 - t^2$ en une fraction rationnelle impaire définie sur $\mathbb{R}$ et de prendre le quotient $\dfrac{2t}{1 + t^2}$.

Enfin la tangente est le quotient de sin par cos. On a enfin $e^{i\theta} = \dfrac{1 - t^2 + 2it}{1 + t^2}$.

Quand θ varie de $-\pi$ à π exclus, $[\cos(\theta), \sin(\theta)]$ décrit le cercle privé du point $(-1,0)$. $t = \tan(\dfrac{\theta}{2})$ varie de $-\infty$ à $+\infty$. $[\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, \dfrac{2t}{1 + t^2}]$ est donc un paramétrage sous forme de fractions rationnelles de polynômes du cercle unité privé du point $(-1,0)$.

<u>e) Groupes</u> :

Notons $\mathbb{U}$ l'ensemble $\{z \mid |z| = 1\} = \{z \mid \exists\ \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}\}$. Cet ensemble possède les propriétés suivantes :

- ❑ $\mathbb{U}$ est stable pour le produit (ce qui signifie : $z \in \mathbb{U}$ et $z' \in \mathbb{U} \Rightarrow zz' \in \mathbb{U}$ pour tous z et z')
- ❑ Ce produit est associatif[2] (ce qui signifie que $(zz')z'' = z(z'z'')$ pour tous z, z', z'' de $\mathbb{U}$)
- ❑ 1, neutre du produit (ce qui signifie que $1z = z1 = z$ pour tout z de $\mathbb{U}$), appartient à $\mathbb{U}$
- ❑ si z appartient à $\mathbb{U}$, son inverse $\dfrac{1}{z}$ aussi.

On dit que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe. Le produit étant commutatif (ce qui signifie que $zz' = z'z$ pour tous z et z' de $\mathbb{U}$), le groupe est dit commutatif (ou abélien). Il existe par ailleurs une analogie de structure entre $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{U},\times)$ par l'intermédiaire de l'application f suivante :

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{R},+) & \rightarrow & (\mathbb{U}, \times) \\ \theta & \rightarrow & e^{i\theta} = f(\theta) \end{array}$$

On a en effet $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$

On dit que f est un morphisme de groupe.

Voici des exemples de groupes :

$(\mathbb{R},+)$	$(\mathbb{C},+)$
$(\mathbb{R}^*,\times)$	$(\mathbb{C}^*,\times)$

Le fait qu'en outre le produit soit distributif par rapport à la somme (ce qui signifie que $z(z' + z'') = zz' + zz''$ et de même pour $(z' + z'')z$, pour tous z, z' et z'') fait que $(\mathbb{R},+,\times)$ ou $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des corps. $(\mathbb{Z},+,\times)$ n'est pas un corps car les entiers non nuls distincts de ± 1 n'ont pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$. Par contre $(\mathbb{Q},+,\times)$ est aussi un corps.

[2] Un exemple de produit non associatif est le produit vectoriel des vecteurs dans l'espace de dimension 3.

II : Utilisation des complexes

1– Formule de Moivre : (Moivre 1667 – 1754)

Cette formule s'énonce :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Elle découle de la propriété $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ qui se montre aisément par récurrence. Elle permet de calculer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exemple : Calculer $\cos(\frac{\pi}{5})$, $\sin(\frac{\pi}{5})$, $\cos(\frac{2\pi}{5})$, $\sin(\frac{2\pi}{5})$. Posons $\theta = \frac{\pi}{5}$. On a $\sin(5\theta) = 0$. Or :

$$\begin{aligned}\sin(5\theta) &= Im(\cos\theta + i.\sin\theta)^5 = 5 \times \cos^4\theta \times \sin\theta - 10 \times \cos^2\theta \times \sin^3\theta + \sin^5\theta \\ &= 5(1-\sin^2\theta)^2 \times \sin\theta - 10(1-\sin^2\theta) \times \sin^3\theta + \sin^5\theta \\ &= 5\sin\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^5\theta\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad 16\sin^4\theta - 20\sin^2\theta + 5 = 0$

On trouve $\sin^2\theta = \dfrac{10 \pm \sqrt{20}}{16} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$

La même formule s'applique pour $\theta = \frac{2\pi}{5}$. Donc :

$$\sin^2(\pi/5) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

$$\sin^2(2\pi/5) = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$$

$\Rightarrow \quad \sin(\pi/5) = \dfrac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

$$\sin(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

On en déduit :

$$\cos(\pi/5) = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

2– Linéarisation

La linéarisation est le problème inverse du précédent. On se donne un produit de puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et l'on souhaite exprimer cette expression en fonction d'une fonction linéaire (du premier degré) de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$. Ce problème se pose par exemple lorsque l'on cherche une primitive d'une telle fonction. Il suffit dans la plupart des cas d'utiliser :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

On peut également utiliser les formules de trigonométrie.

EXEMPLE 1 :

$$\cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} = \frac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}$$

ou $$\cos^4\theta = (\cos^2\theta)^2 = \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)}{4} = \frac{1 + 2\cos(2\theta) + \frac{1 + \cos(4\theta)}{2}}{4}$$

$$= \frac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}$$

EXEMPLE 2 :

$$\sin^3\theta \times \cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \times \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})^2}{-32i} = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})(e^{4i\theta} - 2 + e^{-4i\theta})}{-32i}$$

$$= \frac{e^{5i\theta} - e^{3i\theta} - 2e^{i\theta} + 2e^{-i\theta} + e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta}}{-32i} = \frac{2\sin\theta + \sin(3\theta) - \sin(5\theta)}{16}$$

3– Réduction de *a*cosθ + *b*sinθ

a et *b* sont deux réels non tous deux nuls. On factorise par $\sqrt{a^2+b^2}$. On obtient :

$$\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right]$$

Les coefficients de cosθ et sinθ ont la somme de leur carrés égal à 1. Il existe un réel Φ tel qu'ils valent respectivement par exemple cosΦ et –sinΦ. On obtient alors la forme réduite :

$$\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\Phi)$$

Si θ est de la forme ωt, cette transformation montre qu'une combinaison linéaire de cos et de sin de même pulsation ω et de même phase est une sinusoïde toujours de pulsation ω, mais déphasée.

4– Racines d'un complexe

a) racine carrée, méthode algébrique :

Soit Z = X + *i*Y. On cherche $z = x + iy$ tel que $Z = z^2$.

On obtient :

$$\begin{cases} x^2-y^2 = X \\ 2xy = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = X & \text{(i)} \\ 2xy = Y & \text{(ii)} \\ x^2+y^2 = \sqrt{X^2+Y^2} & \text{(iii)} \end{cases}$$

(i) et (iii) permettent de trouver x^2 et y^2, et donc x et y au signe près ; ii) permet de lever l'ambiguïté sur les signes.

Nous menons ci-dessous le calcul complet, mais dans la pratique, il est plus simple de refaire les calculs plutôt que de tenter de retenir les formules finales :

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2} \\ \mathrm{sg}(xy) = \mathrm{sg}(Y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2}} + i\,\mathrm{sg}(Y)\sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2}}\right)$$

Exemple : $Z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$

$$\begin{cases} x^2-y^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 2xy = \dfrac{1}{2} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

Application aux équations du second degré :
L'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c complexes se résout avec des formules analogues à celles de $\mathbb{R}$, en calculant le discriminant. En effet :

$$az^2 + bz + c = a(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Si on pose $\Delta = \delta^2$, on obtient bien comme racine $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$. (On notera que, si $\sqrt{x}$ désigne un réel *positif*, la notation $\sqrt{z}$ est dénuée de sens puisqu'il n'y a pas de complexes positifs et on évitera donc d'écrire $\sqrt{\Delta}$). Il y a toujours deux racines (éventuellement confondues). Leur somme vaut $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit $\dfrac{c}{a}$.

Exemple : $(1+i)z^2 - (5+i)z + 6 + 4i = 0$
Le discriminant vaut $16 - 30i = \delta^2$ avec $\delta = 5 - 3i$. Les racines sont $\dfrac{5 + i \pm \delta}{2(1 + i)}$, soit, après simplification, $2 - 3i$ et $1 + i$.

<u>b) racine $n^{\text{ème}}$: méthode trigonométrique</u> :

Si $Z = |Z|\, e^{i\Phi}$, on cherche $z = |z|\, e^{i\varphi}$ tel que $z^n = Z$.

On obtient donc :

$$\begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|Z|} \\ n\varphi \equiv \Phi\ [2\pi] \text{ donc } \varphi = \dfrac{\Phi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } k \in \{0,...,n-1\} \end{cases}$$

On a donc $z = \sqrt[n]{|Z|}\, \exp(\dfrac{i\Phi}{n} + \dfrac{2ik\pi}{n})$

Exemple : dans l'exemple du a), on a $Z = e^{i\pi/6}$. Donc $z = \pm e^{i\pi/12.}$
On en déduit que :

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Dans le cas d'une racine carrée z d'un complexe Z, on remarque que $\arg(z) = \dfrac{\arg(Z)}{2}$ modulo π (i.e. à un multiple entier de π près). Il en résulte que z est sur la bissectrice de l'axe réel et de la droite portée par Z, et donc que z est nécessairement colinéaire à $\mathrm{Z} + |\mathrm{Z}|$. On peut donc encore procéder comme suit, en posant $z = \lambda(\mathrm{Z} + |\mathrm{Z}|)$. On obtient :

$$\mathrm{Z} = z^2 = \lambda^2(\mathrm{Z}^2 + 2\mathrm{Z}|\mathrm{Z}| + |\mathrm{Z}|^2) = \lambda^2(\mathrm{Z}^2 + 2\mathrm{Z}|\mathrm{Z}| + \mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}})$$

$$\Rightarrow \qquad 1 = \lambda^2(\mathrm{Z} + 2|\mathrm{Z}| + \overline{\mathrm{Z}}) = 2\lambda^2(\mathrm{Re}(\mathrm{Z}) + |\mathrm{Z}|)$$

$$\Rightarrow \qquad z = \pm \frac{\mathrm{Z} + |\mathrm{Z}|}{\sqrt{2(\mathrm{Re}(\mathrm{Z}) + |\mathrm{Z}|)}}$$

Le calcul est valable pour Z non réel négatif. On s'attachera d'ailleurs à vérifier que l'expression $\dfrac{\mathrm{Z} + |\mathrm{Z}|}{\sqrt{2(\mathrm{Re}(\mathrm{Z}) + |\mathrm{Z}|)}} = \dfrac{\mathrm{X} + \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2} + i\mathrm{Y}}{\sqrt{2(\mathrm{X} + \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2})}}$ est identique à $\sqrt{\dfrac{\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2} + \mathrm{X}}{2}} + i \,\mathrm{sg}(\mathrm{Y}) \sqrt{\dfrac{\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2} - \mathrm{X}}{2}}$ trouvée plus haut.

<u>c) racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité</u> :

Pour Z = 1, on obtient $z = e^{2ik\pi/n}$. Ces nombres forment les n racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité. Ces racines sont situés au sommet d'un polygone régulier de n côtés. Posons $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}, k \in \mathbb{Z}\}$. On pourra vérifier que :

– $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe, sous–groupe de $(\mathbb{U}, \times)$

– L'application : $\mathbb{Z} \to \mathbb{U}_n$

$\qquad k \to e^{2ik\pi/n}$

est un morphisme du groupe $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{U}_n, \times)$.

Ces racines sont solutions de $z^n - 1 = 0$. On a donc :

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - e^{2ik\pi/n})$$

On a par ailleurs $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1)$

Donc :

$$1 + z + \ldots + z^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{2ik\pi/n})$$

On considérera par exemple les cas particuliers $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$:

$n = 2$: 1 et -1 sont racines de $z^2-1 = 0$. -1 est racine de $z+1 = 0$

$n = 3$: 1, j et j^2 sont racines de $z^3-1 = 0$. j et j^2 sont racines de $1 + z + z^2 = 0$

$n = 4$: 1, i, -1 et $-i$ sont racines de $z^4-1 = 0$. i, -1, $-i$ sont racines de $1 + z + z^2 + z^3 = 0$

5- Interprétation géométrique

Nous avons déjà vu que :

$z \to az$ est une similitude de centre O, de rapport $|a|$, d'angle $\arg(a)$

$z \to z + b$ est une translation de vecteur b.

Il en résulte que $z \to az + b = Z$ est la composée d'une similitude et d'une translation. Si $a \neq 1$, il s'agit d'une similitude mais dont le centre est différent de O. Il suffit pour cela de chercher le point ω invariant par la transformation :

$$\omega = a\omega + b \Leftrightarrow \omega = \frac{b}{1-a}$$

et de constater que $Z - \omega = az + b - \dfrac{b}{1-a} = az - \dfrac{ab}{1-a} = a(z - \omega)$. Il s'agit d'une similitude de centre ω de rapport $|a|$, d'angle $\arg(a)$.

$z \to \overline{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel.

Considérons maintenant $z \to \dfrac{1}{z}$. On obtient l'image d'un complexe en prenant l'opposé de l'argument (donc en faisant une symétrie par rapport à l'axe réel), puis en prenant l'inverse du module (donc un faisant ce qu'on appelle une inversion).

Interprétons maintenant le module et l'argument de $\dfrac{z-a}{z-b}$. Considérons les points A, B et Z d'affixe respectifs a, b et z. On a :

$\dfrac{\text{ZA}}{\text{ZB}} = \left|\dfrac{z-a}{z-b}\right|$ rapport des longueurs des côtés du triangle issus de Z

$\arg(\dfrac{z-a}{z-b}) = \arg(z-a) - \arg(z-b) = \text{angle}(\text{O}x,\boldsymbol{AZ}) - \text{angle}(\text{O}x,\boldsymbol{BZ}) = \text{angle}(\boldsymbol{BZ},\boldsymbol{AZ})$

$= \text{angle}(\text{BZA})$

Certaines propriétés géométriques s'interprètent sous forme complexe. Par exemple :

A, B et Z sont alignés si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{AZ}$ et $\boldsymbol{BZ}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$ (imaginaire pur)

◆